

Министерство образования Республики Беларусь

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

Ю.Ю. Гнездовский, В. Н. Горбузов, П.Ф. Проневич

**ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА**

Гродно 2007

УДК 51(075.8)

ББК 22.1

Г56

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Гродненского государственного университета имени Янки Купалы *И.П. Мартынов*;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и оптимального управления Гродненского государственного университета имени Янки Купалы *Н.С. Берёзкина*.

Рекомендовано Советом Гродненского государственного университета имени Янки Купалы.

Гнездовский, Ю.Ю.

Показательные и логарифмические уравнения и неравенства:

Г56 пособие / Ю.Ю. Гнездовский, В.Н. Горбузов, П.Ф. Проневич. — Гродно: ГрГУ, 2007. — 201 с.

ISBN

В пособии рассмотрены методы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Предназначено для учителей математики и учащихся общеобразовательных школ, гимназий, лицеев и колледжей. Может быть использовано при обучении студентов педагогических специальностей вузов методам решения задач элементарной математики.

УДК 51(075.8)

ББК 22.1

ISBN

© Гнездовский Ю.Ю., Горбузов В.Н.,
Проневич П.Ф., 2007

ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемой читателям книге рассматриваются методы решения задач по одному из разделов курса «Алгебра и начала анализа». Это задачи на применение свойств показательной и логарифмической функций.

Краткие теоретические сведения, решения задач позволяют использовать настоящее пособие в качестве самостоятельной подготовки учащихся, развития умений и навыков решения показательных и логарифмических уравнений, неравенств и их систем. Предполагается также возможность использования задач для обобщения и повторения на завершающей стадии обучения и при подготовке к экзаменам.

Показательные и логарифмические уравнения и неравенства имеют стройную логическую основу их решения. При этом широко используется метод равносильностных переходов.

При чтении данного пособия необходимо учитывать следующие обстоятельства.

Пусть A — некоторое уравнение, неравенство, система или совокупность, B — также некоторое уравнение, неравенство, система или совокупность. При этом, если A , например, неравенство, то B может быть уравнением, неравенством, системой или совокупностью.

Будем считать, что A равносильно B и запишем

$$A \Longleftrightarrow B,$$

если множество решений A является множеством решений B , а множество решений B является множеством решений A .

Другими словами, A и B равносильны тогда и только тогда, когда у A и B одно и то же множество решений.

Приведем примеры отдельных равносильностей:

$$x + 12 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -12;$$

$$x + 3 = x^2 + 3 \iff x = x^2;$$

$$(x + 3, 2)^2 = 0 \iff |x + 3, 2| = 0 \iff x + 3, 2 = 0;$$

$$(x + 7)(x^2 - 1) = 0 \iff \begin{cases} x + 7 = 0, \\ x^2 - 1 = 0; \end{cases}$$

$$(x^2 - 25)^2 + (x + 5)^2 = 0 \iff \begin{cases} x^2 - 25 = 0, \\ x + 5 = 0; \end{cases}$$

$$\frac{x + 5}{2 - x} > 0 \iff (x + 5)(2 - x) > 0;$$

$$\sin x \geq 1 \iff \sin x = 1;$$

$$\cos x \leq -1 \iff \cos x = -1.$$

Символ $\iff$ будем использовать и вместо оборотов слов «тогда и только тогда, когда» и «если и только если».

Например, запись

$$\frac{5}{6} < \frac{7}{8} \iff 5 \cdot 8 < 6 \cdot 7$$

означает, что

$$\frac{5}{6} < \frac{7}{8} \text{ тогда и только тогда, когда } 5 \cdot 8 < 6 \cdot 7$$

или, что то же,

$$\frac{5}{6} < \frac{7}{8}, \text{ если и только если } 5 \cdot 8 < 6 \cdot 7.$$

Будем использовать весьма удобные при изложении материала *условные обозначения*:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
 $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;
 $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;
 $\emptyset$ — пустое множество;
 $\forall$ — для всех, при любых;
 $\implies$ — следовательно; если, то;
 $D(f)$ — область определения функции f ;
 $E(f)$ — множество значений функции f .
 Так, запись

$$|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

читается:

$$|x| \geq 0 \text{ при любых } x \in \mathbb{R}$$

или

$$|x| \geq 0 \text{ при любом действительном } x.$$

Утверждение

$$\text{если } x = 2, \text{ то } |x| = 2$$

с помощью символа $\implies$ записывается кратко:

$$x = 2 \implies |x| = 2.$$

Среди числовых множеств будем выделять *числовые промежутки*. Это множества одного из видов:

$[a; b]$ при $a < b$ — *отрезок*;
 $(a; b)$ — *интервал*;
 $[a; b)$ и $(a; b]$ — *полуинтервалы*;
 $(-\infty; b]$, $(-\infty; b)$, $[a; +\infty)$, $(a; +\infty)$ — *числовые лучи*;
 $(-\infty; +\infty)$ — *числовая прямая*.

Обратим внимание на ещё одно обстоятельство.

Если требуется решить уравнение, неравенство, систему или совокупность, то такую задачу понимаем как нахождение их *множества решений*.

Например, неравенство $x^2 < -3$ не имеет решений. Поэтому его множеством решений является пустое множество. В ответе запишем: $\emptyset$.

У квадратного уравнения $x^2 = 5$ два корня: $x_1 = -\sqrt{5}$ и $x_2 = \sqrt{5}$. Его множество решений состоит из двух чисел $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$. В ответе запишем: $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.

Система

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x - 1 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1, \\ x \leq 1 \end{cases} \iff -1 < x \leq 1,$$

а её множеством решений является полуинтервал $(-1; 1]$.

Совокупность

$$\begin{cases} x - 2 > 1, \\ x - 1 \leq -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 3, \\ x \leq -1. \end{cases}$$

В ответе запишем: $(-\infty; -1] \cup (3; +\infty)$.

Неравенство $(x - 1)^2 \geq 0$ выполняется при любом x . Множество действительных чисел является его множеством решений. В ответе запишем: $\mathbb{R}$ или $(-\infty; +\infty)$.

Множество решений систем и совокупностей, которые содержат две переменные, будем записывать в виде множества упорядоченных пар.

Например, система

$$\begin{cases} |x| - 2 = 5, \\ y - 1 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = 7, \\ y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} x = -7, \\ y = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 7, \\ y = -1. \end{cases} \end{cases}$$

В ответе запишем: $\{(-7, -1), (7, -1)\}$.

Для ссылок на формулы и примеры будем использовать записи $(k.l)$ и $k.l$, где k — номер формулы или примера, l — номер пункта.

Глава 1

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Показательные уравнения

1. Простейшее показательное уравнение

Уравнение вида

$$a^{f(x)} = b \quad \text{при } a > 0 \text{ и } a \neq 1, \quad (1)$$

где b — некоторое действительное число, является *простейшим показательным уравнением*.

Уравнение (1) при $b \leq 0$ решений не имеет.

Это следует из того, что показательная функция

$$y(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

является положительной. А значит, степень $a^{f(x)}$ принимает только положительные значения при всех тех значениях переменной x , при которых выражение f определено. Поэтому и число b , равное $a^{f(x)}$, должно быть только положительным.

Пусть $b > 0$. Тогда простейшее показательное уравнение (1) решается почленным логарифмированием. При этом используется *свойство обратимости логарифмической функции*: одному положительному значению аргумента соответствует одно значение логарифмической функции, и, наоборот, одному значению логарифмической функции соответствует одно значение аргумента.

По этому свойству

$$x_1 = x_2 > 0 \iff \log_a x_1 = \log_a x_2 \quad (a > 0, a \neq 1). \quad (2)$$

Если в равносильности (2) положить

$$x_1 = a^{f(x)} \quad \text{и} \quad x_2 = b,$$

то уравнение

$$a^{f(x)} = b \iff \log_a a^{f(x)} = \log_a b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0).$$

Отсюда с учётом, что $\log_a a^{f(x)} = f(x)$, получаем

$$a^{f(x)} = b \iff f(x) = \log_a b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0). \quad (3)$$

В частных случаях, когда $b = 1$ и $b = a^c$, будем иметь:

$$a^{f(x)} = 1 \iff f(x) = 0 \quad (a > 0, a \neq 1); \quad (4)$$

$$a^{f(x)} = a^c \iff f(x) = c \quad (a > 0, a \neq 1). \quad (5)$$

Равносильность (3) предполагает логарифмирование обеих частей уравнения (1) по основанию a . Иногда удобно логарифмирование по основанию 10. При этом

$$a^{f(x)} = b \iff f(x) \lg a = \lg b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0). \quad (6)$$

Пример 1. В соответствии с равносильностью (3) уравнение

$$5^{7-2x} = 121 \iff 7 - 2x = \log_5 121 \iff$$

$$\iff x = 3,5 - 0,5 \log_5 11^2 \iff x = 3,5 - \log_5 11.$$

Пример 2. Решим уравнение

$$5^{x+1} - 5^x = 24. \quad (7)$$

Поскольку $5^{x+1} = 5 \cdot 5^x$, то

$$5^{x+1} - 5^x = 4 \cdot 5^x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

а уравнение (7) равносильно уравнению

$$4 \cdot 5^x = 24.$$

Переходим к простейшему показательному уравнению

$$5^x = 6$$

с решением $x = \log_5 6$.

Пример 3. Используя равносильность (4), решим уравнение

$$\begin{aligned} 11^{x-7} = 17^{7-x} &\iff 11^{x-7} = \frac{1}{17^{x-7}} \iff 11^{x-7} \cdot 17^{x-7} = 1 \iff \\ &\iff (11 \cdot 17)^{x-7} = 1 \iff x - 7 = 0 \iff x = 7. \end{aligned}$$

Пример 4. В соответствии с равносильностью (5) уравнение

$$2^{4x} = 16 \iff 16^x = 16 \iff x = 1.$$

Аналогично решаем уравнения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{8}\right)^{0,5x-1} = 4 &\iff (2^{-3})^{0,5x-1} = 2^2 \iff 2^{3-1,5x} = 2^2 \iff \\ &\iff 3 - 1,5x = 2 \iff 1,5x = 1 \iff x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

и

$$4^{7^x} = 16384 \iff 4^{7^x} = 4^7 \iff 7^x = 7 \iff x = 1.$$

Задача 1. Решите уравнение

$$7^{\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} - 3\frac{1}{3}} = 1. \quad (8)$$

Решение. В соответствии с формулой (4) показательное уравнение (8) равносильно алгебраическому уравнению¹

¹Используется равносильность $f(x) + \frac{1}{f(x)} = b + \frac{1}{b} \iff \begin{cases} f(x) = b \neq 0, \\ f(x) = \frac{1}{b}. \end{cases}$

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} - 3\frac{1}{3} = 0 \iff \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} = 3 + \frac{1}{3} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} = 3, \\ \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{4-2x}{x-1} = 0, \\ \frac{2x+4}{x-1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2, \\ x = -2. \end{cases}$$

Ответ: $\{-2; 2\}$.

Задача 2. Решите уравнение

$$(0,1(6))^{x-16} \cdot 0,25 = \sqrt{33 + \sqrt{128}} - \frac{0,23(7) + \frac{43}{450}}{0,5(61) - \frac{113}{495}}. \quad (9)$$

Решение. Предварительно выполним преобразования, с помощью которых смешанные бесконечные десятичные периодические дроби представим обыкновенными дробями:

$$0,1(6) = \frac{1}{10} \cdot 1,(6) = \frac{1}{10} \cdot (1 + 0,(6)) = \frac{1}{10} \cdot \left(1 + \frac{6}{9}\right) = \frac{1}{10} \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6};$$

$$0,23(7) = \frac{1}{100} \cdot (23 + 0,(7)) = \frac{1}{100} \cdot \left(23 + \frac{7}{9}\right) = \frac{1}{100} \cdot \frac{214}{9} = \frac{107}{450};$$

$$0,5(61) = \frac{1}{10} \cdot (5 + 0,(61)) = \frac{1}{10} \cdot \left(5 + \frac{61}{99}\right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{556}{99} = \frac{278}{495}.$$

Тогда частное

$$\frac{0,23(7) + \frac{43}{450}}{0,5(61) - \frac{113}{495}} = \frac{\frac{107}{450} + \frac{43}{450}}{\frac{278}{495} - \frac{113}{495}} = \frac{\frac{150}{450}}{\frac{165}{495}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1.$$

При этом выражение в правой части уравнения (9) будет иметь вид

$$\begin{aligned}\sqrt{33 + \sqrt{128}} - 1 &= \sqrt{33 + 2\sqrt{32}} - 1 = \sqrt{32 + 2\sqrt{32} + 1} - 1 = \\ &= \sqrt{(\sqrt{32} + 1)^2} - 1 = (\sqrt{32} + 1) - 1 = \sqrt{32} = 2^{\frac{5}{2}}.\end{aligned}$$

Уравнение (9) равносильно уравнению

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{6}\right)^{x-16} \cdot \frac{1}{2^2} &= 2^{\frac{5}{2}} \iff 6^{16-x} = 2^{\frac{9}{2}} \iff (16-x) \lg 6 = \frac{9}{2} \lg 2 \iff \\ \iff 32 \lg 6 - 9 \lg 2 &= 2x \lg 6 \iff x = \frac{32 \lg 6 - 9 \lg 2}{2 \lg 6} \iff \\ \iff x &= \frac{23 \lg 2 + 32 \lg 3}{2(\lg 2 + \lg 3)}.\end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{23 \lg 2 + 32 \lg 3}{2(\lg 2 + \lg 3)} \right\}$.

Задача 3. При каких значениях x у функции

$$f(x) = 5^x + 3 \cdot 5^{x-2} - 140x \ln 5$$

производная равна нулю?

Решение. Область определения $D(f) = \mathbb{R}$.

Производная

$$\begin{aligned}f'(x) &= (5^x + 3 \cdot 5^{x-2} - 140x \ln 5)' = (5^x)' + 3(5^{x-2})' - (140x \ln 5)' = \\ &= 5^x \ln 5 + 3 \cdot 5^{x-2} (x-2)' \ln 5 - 140 \ln 5 = (5^x + 3 \cdot 5^{x-2} - 140) \ln 5 \quad \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Уравнение

$$\begin{aligned}5^x + 3 \cdot 5^{x-2} - 140 &= 0 \iff 5^x + \frac{3}{25} \cdot 5^x = 140 \iff \\ \iff 28 \cdot 5^x &= 140 \cdot 25 \iff 5^x = 5^3 \iff x = 3.\end{aligned}$$

Ответ: 3.

2. Специальные виды показательных уравнений

2.1. Уравнение $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

Рассмотрим показательное уравнение

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1). \quad (1)$$

Если $b = a$, то

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x) \quad (a > 0, a \neq 1). \quad (2)$$

В общем случае уравнение (1) может быть решено почленным логарифмированием следующими способами.

1. *Логарифмирование по основанию 10:*

$$\begin{aligned} a^{f(x)} = b^{g(x)} &\iff f(x) \lg a = g(x) \lg b \\ &(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1). \end{aligned} \quad (3)$$

2. *Логарифмирование по основанию e :*

$$\begin{aligned} a^{f(x)} = b^{g(x)} &\iff f(x) \ln a = g(x) \ln b \\ &(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1). \end{aligned} \quad (4)$$

3. *Логарифмирование по основанию a :*

$$\begin{aligned} a^{f(x)} = b^{g(x)} &\iff f(x) = g(x) \log_a b \\ &(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1). \end{aligned} \quad (5)$$

4. *Логарифмирование по основанию b :*

$$\begin{aligned} a^{f(x)} = b^{g(x)} &\iff f(x) \log_b a = g(x) \\ &(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1). \end{aligned} \quad (6)$$

5. Логарифмирование по основанию c :

$$\boxed{a^{f(x)} = b^{g(x)} \iff f(x) \log_c a = g(x) \log_c b} \quad (7)$$

$$(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0, c \neq 1).$$

Пример 1. Используя равносильность (2), решим уравнение

$$2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3 \iff 10^{x^2-3} = 10^{3x-5} \iff$$

$$\iff x^2 - 3 = 3x - 5 \iff x^2 - 3x + 2 = 0 \iff \begin{cases} x = 1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Пример 2. Используя равносильность (2), решим уравнение

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x} - \left(\frac{8}{27}\right)^{x-2} = 0 \iff \left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x} = \left(\frac{8}{27}\right)^{x-2} \iff$$

$$\iff \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3(x-2)} \iff 2x - 2 = 3(x - 2) \iff x = 4.$$

Пример 3 (продолжение примера 3.1). В соответствии с равносильностью (7) при любом положительном $c \neq 1$ уравнение

$$11^{x-7} = 17^{7-x} \iff \log_c 11^{x-7} = \log_c 17^{7-x} \iff$$

$$\iff (x - 7) \log_c 11 = (7 - x) \log_c 17 \iff$$

$$\iff (x - 7)(\log_c 11 + \log_c 17) = 0 \iff (x - 7) \log_c (11 \cdot 17) = 0 \iff$$

$$\iff x - 7 = 0 \iff x = 7.$$

Следовательно, это уравнение может быть решено с помощью равносильностных переходов (3) – (6), когда основание c соответственно равно 10, e , 11 и 17.

Пример 4. Решим уравнение

$$3^{2(2x+5)} \cdot 5^{2(3x+1)} = 15^{5x+6}. \quad (8)$$

Способ 1. Разделим почленно уравнение (8) на

$$15^{5x+6} = 3^{5x+6} \cdot 5^{5x+6}.$$

А затем используем формулу (4.1):

$$\begin{aligned} 3^{2(2x+5)-(5x+6)} \cdot 5^{2(3x+1)-(5x+6)} &= 1 \iff \\ \iff 3^{-x+4} \cdot 5^{x-4} &= 1 \iff \left(\frac{5}{3}\right)^{x-4} = 1 \iff x = 4. \end{aligned}$$

Способ 2. Прологарифмируем уравнение (8), например, по основанию 10. Получим равносильное уравнение

$$\begin{aligned} 2(2x+5)\lg 3 + 2(3x+1)\lg 5 &= (5x+6)(\lg 3 + \lg 5) \iff \\ \iff (\lg 5 - \lg 3)x - 4(\lg 5 - \lg 3) &= 0 \iff x = 4. \end{aligned}$$

2.2. Уравнение $A_1 a^{f(x)+\beta_1} + \dots + A_n a^{f(x)+\beta_n} = B$

Рассмотрим показательное уравнение

$$A_1 a^{f(x)+\beta_1} + A_2 a^{f(x)+\beta_2} + \dots + A_n a^{f(x)+\beta_n} = B, \quad (9)$$

где $a, A_1, \dots, A_n, B, \beta_1, \dots, \beta_n$ — действительные числа, причём $a > 0$ и $a \neq 1$.

Левую часть уравнения (9) приводим к выражению

$$Aa^{f(x)},$$

где

$$A = A_1 a^{\beta_1} + A_2 a^{\beta_2} + \dots + A_n a^{\beta_n}.$$

Тем самым, уравнение (9) равносильно простейшему показательному уравнению

$$Aa^{f(x)} = B.$$

Пример 1. Показательное уравнение

$$\begin{aligned}
 3^{2\sqrt{x}} + 3^{2\sqrt{x}-1} - 9^{\sqrt{x}-1} &= 11 \iff 3^{2\sqrt{x}} + 3^{2\sqrt{x}-1} - 3^{2\sqrt{x}-2} = 11 \iff \\
 &\iff 3^{2\sqrt{x}-2} \cdot (3^2 + 3 - 1) = 11 \iff 3^{2\sqrt{x}-2} = 1 \iff \\
 &\iff 2\sqrt{x} - 2 = 0 \iff \sqrt{x} = 1 \iff x = 1.
 \end{aligned}$$

Пример 2. Показательное уравнение

$$\begin{aligned}
 2^{4x} + 2^{4x-1} + 2^{4x-2} &= 5^{4x} + 5^{4x-1} + 5^{4x-2} \iff \\
 \iff 2^{4x-2} \cdot (2^2 + 2 + 1) &= 5^{4x-2} \cdot (5^2 + 5 + 1) \iff \\
 \iff 7 \cdot 2^{4x-2} &= 31 \cdot 5^{4x-2}.
 \end{aligned}$$

Логарифмируя по основанию 10, получим

$$\begin{aligned}
 \lg 7 + (4x - 2) \lg 2 &= \lg 31 + (4x - 2) \lg 5 \iff \\
 \iff 4x - 2 &= \frac{\lg 31 - \lg 7}{\lg 2 - \lg 5} \iff x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\lg 31 - \lg 7}{\lg 2 - \lg 5}.
 \end{aligned}$$

2.3. Уравнение $A_1 a^{f(x)+\beta_1} + \dots + A_n a^{nf(x)+\beta_n} = B$

Рассмотрим показательное уравнение

$$A_1 a^{f(x)+\beta_1} + A_2 a^{2f(x)+\beta_2} + \dots + A_n a^{nf(x)+\beta_n} = B, \quad (10)$$

где $a, B, A_1, \dots, A_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ — действительные числа, причём $a > 0$ и $a \neq 1$.

С учётом свойства степени преобразуем левую часть уравнения (10), и, тем самым, уравнение (10) приведём к равносильному уравнению

$$A_1 a^{\beta_1} a^{f(x)} + A_2 a^{\beta_2} a^{2f(x)} + \dots + A_n a^{\beta_n} a^{nf(x)} = B. \quad (11)$$

Затем подстановкой

$$a^{f(x)} = y$$

показательное уравнение (11), а значит, и уравнение (10), приведём к алгебраическому уравнению

$$A_1 a^{\beta_1} y + A_2 a^{\beta_2} y^2 + \dots + A_n a^{\beta_n} y^n = B,$$

которое решаем при $y > 0$.

Пример 1. Показательное уравнение

$$2^x - 2 \cdot 0,5^{2x} - 0,5^x - 1 = 0$$

равносильно уравнению

$$2^x - 2 \cdot \frac{1}{2^{2x}} - \frac{1}{2^x} - 1 = 0 \iff 2^{3x} - 2^{2x} - 2^x - 2 = 0.$$

Подстановкой

$$2^x = y > 0$$

получим кубическое уравнение

$$y^3 - y^2 - y - 2 = 0 \iff (y - 2)(y^2 + y + 1) = 0 \iff y = 2,$$

ибо квадратный трёхчлен $y^2 + y + 1 \neq 0$, как имеющий отрицательный дискриминант $D = 1 - 4 = -3$.

Следовательно, $2^x = 2$, а значит, $x = 1$.

Пример 2. Решим уравнение

$$\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84. \quad (12)$$

Выполним подстановку

$$\left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = y > 0,$$

при которой в уравнении (12) слагаемое

$$(\sqrt[5]{3})^x = 9y^2, \text{ так как } (\sqrt[5]{3})^{x-10} = y^2.$$

Получим квадратное уравнение

$$9y^2 + y - 84 = 0 \iff (9y + 28)(y - 3) = 0,$$

положительным корнем которого является $y = 3$.

Значит, уравнение (12) равносильно уравнению

$$(\sqrt[10]{3})^{x-10} = 3 \iff \frac{x-10}{10} = 1 \iff x = 20.$$

Пример 3. Решим уравнение

$$5^{\frac{x+1}{x-3}} - 23 \cdot 5^{\frac{x-1}{x-3}} - 250 = 0. \quad (13)$$

Учитывая, что при любом $x \neq 3$ дробь

$$\frac{x+1}{x-3} = \frac{(x-3)+4}{x-3} = 1 + \frac{4}{x-3},$$

а дробь

$$\frac{x-1}{x-3} = \frac{(x-3)+2}{x-3} = 1 + \frac{2}{x-3},$$

уравнение (13) приводим к равносильному уравнению

$$5 \cdot 5^{\frac{4}{x-3}} - 23 \cdot 5 \cdot 5^{\frac{2}{x-3}} - 250 = 0.$$

Выполнив почленное деление на 5, получим равносильное уравнению (13) более простое уравнение

$$5^{\frac{4}{x-3}} - 23 \cdot 5^{\frac{2}{x-3}} - 50 = 0 \iff \left(5^{\frac{2}{x-3}}\right)^2 - 23 \cdot 5^{\frac{2}{x-3}} - 50 = 0.$$

Разложив на множители, получим

$$\left(5^{\frac{2}{x-3}} - 25\right)\left(5^{\frac{2}{x-3}} + 2\right) = 0.$$

Отсюда

$$5^{\frac{2}{x-3}} = 5^2 \iff \frac{2}{x-3} = 2 \iff x-3 = 1 \iff x = 4.$$

2.4. Уравнение $Aa^{f(x)} + Ba^{\frac{f(x)}{2}} \cdot b^{\frac{f(x)}{2}} + Cb^{f(x)} = 0$

Показательное уравнение

$$Aa^{f(x)} + Ba^{\frac{f(x)}{2}} \cdot b^{\frac{f(x)}{2}} + Cb^{f(x)} = 0,$$

где A, B, C, a, b — действительные ненулевые числа, причём $a > 0$ и $b > 0$, делением на $b^{f(x)}$ (можно и на $a^{f(x)}$) приведём к показательному уравнению вида

$$A\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + B\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{f(x)}{2}} + C = 0.$$

С помощью подстановки

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{f(x)}{2}} = y > 0$$

получим квадратное уравнение

$$Ay^2 + By + C = 0,$$

которое решаем при $y > 0$.

Пример 1. Показательное уравнение

$$4^x + 6^x = 9^x$$

равносильно уравнению

$$2^{2x} + (2 \cdot 3)^x - 3^{2x} = 0.$$

Разделив его почленно на $3^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, будем иметь

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0.$$

Полагая

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = y > 0,$$

получим квадратное уравнение

$$y^2 + y - 1 = 0 \iff \left(y + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(y - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = 0,$$

среди корней которого положительным будет $y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Тогда

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \iff x = \frac{\lg(-1 + \sqrt{5}) - \lg 2}{\lg 2 - \lg 3}.$$

Пример 2. Решим показательное уравнение

$$10^{-\frac{2}{x}} + 25^{-\frac{1}{x}} = 4,25 \cdot 50^{-\frac{1}{x}}. \quad (14)$$

Уравнение (14) равносильно уравнению

$$10^{-\frac{2}{x}} - 4,25 \cdot 10^{-\frac{1}{x}} \cdot 5^{-\frac{1}{x}} + 5^{-\frac{2}{x}} = 0 \iff 2^{-\frac{2}{x}} - 4,25 \cdot 2^{-\frac{1}{x}} + 1 = 0.$$

Пусть $2^{-\frac{1}{x}} = y > 0$. Тогда получим квадратное уравнение

$$y^2 - 4,25y + 1 = 0 \iff 4y^2 - 17y + 4 = 0 \iff \begin{cases} y = 0,25, \\ y = 4. \end{cases}$$

Следовательно, показательное уравнение (14) равносильно совокупности простейших показательных уравнений

$$\begin{cases} 2^{-\frac{1}{x}} = 0,25, \\ 2^{-\frac{1}{x}} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-\frac{1}{x}} = 2^{-2}, \\ 2^{-\frac{1}{x}} = 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x} = -2, \\ -\frac{1}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Множеством решений уравнения (14) будет $\{-0,5; 0,5\}$.

Задача 1. Решите уравнение

$$2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 5^{2x+1} = 0. \quad (15)$$

Решение. Сначала уравнение (15) преобразуем к виду

$$2 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x \cdot 5^x + 5 \cdot 5^{2x} = 0.$$

Затем, почленным делением¹ на 5^{2x} приведём к равносильному уравнению (15) показательному уравнению более простого вида

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 5 &= 0 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{5}\right)^x - 1\right) \cdot \left(\left(\frac{2}{5}\right)^x - \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^x = 1, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{5}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\{-1; 0\}$.

3. Задачи

Задача 1. Решите уравнение

$$\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{x-1}\right)^{x+3} = \sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^{x+3}}. \quad (1)$$

¹ Можно почленно разделить и на 2^{2x} .

Решение. Преобразуем выражения в правой и левой частях уравнения (1) при любом действительном x :

$$\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^{x+3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x+3}{5}};$$

$$\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{x-1}\right)^{x+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{(x-1)(x+3)}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{(1-x)(x+3)}{2}}.$$

Тогда уравнение (1) равносильно уравнению

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{(1-x)(x+3)}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x+3}{5}} \iff \frac{(1-x)(x+3)}{2} = \frac{x+3}{5} \iff$$

$$\iff 2(x+3) + 5(x-1)(x+3) = 0 \iff (x+3)(5x-3) = 0 \iff \begin{cases} x = -3, \\ x = 0,6. \end{cases}$$

Ответ: $\{-3; 0,6\}$.

Задача 2. Решите уравнение

$$\sqrt[5]{(0,(1))^{20-0,5x}} + 2\sqrt[5]{3^{x-35}} = 21. \quad (2)$$

Решение. Поскольку при любом действительном x

$$(0,(1))^{20-0,5x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{20-0,5x} = 3^{x-40},$$

то уравнение (2) равносильно уравнению

$$\sqrt[5]{3^{x-40}} + 2\sqrt[5]{3^{x-35}} = 21 \iff \sqrt[5]{3^{x-40}} + 2\sqrt[5]{3^{(x-40)+5}} = 21 \iff$$

$$\iff \sqrt[5]{3^{x-40}}(1 + 2\sqrt[5]{3^5}) = 21 \iff \sqrt[5]{3^{x-40}} = 3 \iff$$

$$\iff 3^{\frac{x-40}{5}} = 3 \iff \frac{x-40}{5} = 1 \iff x = 45.$$

Ответ: $\{45\}$.

Задача 3. Решите уравнение

$$(\sqrt{5} + 2)^{x^2 - 6x + 11} - (\sqrt{5} - 2)^{x^2 - 6x + 9} = \frac{4}{\sqrt{5} - 2}. \quad (3)$$

Решение. Поскольку

$$\sqrt{5} + 2 = \frac{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{5} - 2} = \frac{5 - 4}{\sqrt{5} - 2} = \frac{1}{\sqrt{5} - 2},$$

то уравнение (3) равносильно уравнению

$$\frac{1}{(\sqrt{5} - 2)^{x^2 - 6x + 11}} - (\sqrt{5} - 2)^{x^2 - 6x + 9} = \frac{4}{\sqrt{5} - 2}.$$

Подстановкой $(\sqrt{5} - 2)^{x^2 - 6x + 9} = z$ это показательное уравнение приводим к алгебраическому уравнению

$$\frac{1}{(\sqrt{5} - 2)^2} \cdot \frac{1}{z} - z - \frac{4}{\sqrt{5} - 2} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + 2$, получаем равносильное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{5} + 2)^2}{z} - z - 4(\sqrt{5} + 2) = 0 \iff \\ & \iff \frac{z^2 + 4(\sqrt{5} + 2)z - (\sqrt{5} + 2)^2}{z} = 0 \iff \\ & \iff \frac{(z + (\sqrt{5} + 2)^2) \cdot (z - (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2))}{z} = 0 \iff \\ & \iff \begin{cases} z = -(\sqrt{5} + 2)^2, \\ z = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

При подстановке предполагается, что $z > 0$. Поэтому уравнение (3) равносильно простейшему показательному уравнению

$$\begin{aligned} (\sqrt{5} - 2)^{x^2 - 6x + 9} = 1 &\iff x^2 - 6x + 9 = 0 \iff \\ &\iff (x - 3)^2 = 0 \iff x = 3. \end{aligned}$$

Ответ: $\{3\}$.

Задача 4. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = 6. \quad (4)$$

Решение. Учитывая, что

$$3 - 2\sqrt{2} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{9 - 8}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}},$$

выполним подстановку

$$\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x = z > 0,$$

при которой $\left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{1}{z}$.

Тогда уравнение (4) приведём к системе:

$$\begin{cases} z > 0, \\ z + \frac{1}{z} = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} z > 0, \\ z^2 - 6z + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 3 - 2\sqrt{2}, \\ z = 3 + 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение (4) равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x = 3 - 2\sqrt{2}, \\ \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x = 3 + 2\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} (3 + 2\sqrt{2})^{\frac{x}{2}} = (3 + 2\sqrt{2})^{-1}, \\ (3 + 2\sqrt{2})^{\frac{x}{2}} = 3 + 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Отсюда находим, что

$$\frac{x}{2} = -1 \iff x = -2 \quad \text{или} \quad \frac{x}{2} = 1 \iff x = 2.$$

Значит, множеством решений уравнения (4) будет $\{-2; 2\}$.

Ответ: $\{-2; 2\}$.

Задача 5. Решите уравнение

$$\frac{1}{2} + 16^{\sin x} = \frac{6}{16^{\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}. \quad (5)$$

Решение. Поскольку

$$16^{\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = 16^{\frac{1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}} = (4^2)^{\frac{1 - \sin x}{2}} = 4^{1 - \sin x},$$

то уравнение (5) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + 4^{2 \sin x} &= \frac{6}{4^{1 - \sin x}} \iff \frac{1}{2} + 4^{2 \sin x} = \frac{6 \cdot 4^{\sin x}}{4} \iff \\ \iff 2 \cdot 4^{2 \sin x} - 3 \cdot 4^{\sin x} + 1 &= 0 \iff \left(4^{\sin x} - \frac{1}{2}\right)(4^{\sin x} - 1) = 0 \iff \\ \iff \begin{cases} 4^{\sin x} = \frac{1}{2}, \\ 4^{\sin x} = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \sin x = 0 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \\ x = \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \pi n\right\} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. Решите уравнение

$$\sqrt{x} \left(9^{\sqrt[6]{x^2-3}} - 3^{\sqrt[6]{x^2-3}} \right) = 3^{2\sqrt[6]{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt[6]{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18. \quad (6)$$

Решение. Уравнение (6) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \left(3^{2\sqrt[6]{x^2-3}} - 3^{\sqrt[6]{x^2-3}} \right) - 3 \left(3^{2\sqrt[6]{x^2-3}} - 3^{\sqrt[6]{x^2-3}} \right) - 6(\sqrt{x} - 3) &= 0 \iff \\ \iff (\sqrt{x} - 3) \left(3^{2\sqrt[6]{x^2-3}} - 3^{\sqrt[6]{x^2-3}} - 6 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Полученное уравнение, а значит, и уравнение (6), равносильно совокупности двух уравнений при условии, что оно имеет смысл:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - 3 \geq 0, \\ \sqrt{x} - 3 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x^2 - 3 \geq 0, \\ x = 9 \end{cases} \iff x = 9; \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ 3^{2\sqrt[6]{x^2-3}} - 3^{\sqrt[6]{x^2-3}} - 6 = 0 \end{cases} &\iff \\ \iff \begin{cases} x \geq 0, \\ \left(3^{\sqrt[6]{x^2-3}} + 2 \right) \left(3^{\sqrt[6]{x^2-3}} - 3 \right) = 0 \end{cases} &\iff \\ \iff \begin{cases} x \geq 0, \\ 3^{\sqrt[6]{x^2-3}} = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt[6]{x^2-3} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 = 4 \end{cases} &\iff x = 2. \end{aligned}$$

Ответ: $\{2; 9\}$.

Задача 7. Решите уравнение

$$5^x \cdot \sqrt{x^{x-1}} = 500. \quad (7)$$

Решение. В задании уравнения (7) предполагается извлечение корня степени x . Поэтому x — натуральное число, большее или равное 2.

Логарифмированием по основанию 5 уравнение (7) приводим к равносильному при условии, что $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$, уравнению

$$\begin{aligned} x + \log_5 2^{\frac{3(x-1)}{x}} &= \log_5 (2^2 \cdot 5^3) \iff \\ \iff x + \frac{3(x-1)}{x} \log_5 2 - 3 - 2 \log_5 2 &= 0 \iff \\ \iff x^2 + 3x \log_5 2 - 3 \log_5 2 - 3x - 2x \log_5 2 &= 0 \iff \\ \iff (x-3)(x + \log_5 2) &= 0. \end{aligned}$$

Число $\log_5 2$ не натуральное¹. Поэтому уравнение (7) имеет одно решение $x = 3$.

Ответ: $\{3\}$.

Задача 8. Решите уравнение

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}. \quad (8)$$

Решение. Учтывая, что $4^\alpha = 2^{2\alpha}$, из левой и правой частей уравнения (8) перенесём степени с разными основаниями:

$$\begin{aligned} 4^x + 2^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} &= 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \iff 4^x + 4^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \iff \\ \iff 4^{x-\frac{1}{2}}(2+1) &= 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1) \iff \frac{4^{x-\frac{1}{2}}}{4} = \frac{3^{x-\frac{1}{2}}}{3} \iff \\ \iff 4^{x-\frac{3}{2}} &= 3^{x-\frac{3}{2}} \iff \left(\frac{4}{3}\right)^{x-\frac{3}{2}} = 1 \iff x - \frac{3}{2} = 0 \iff x = 1\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{1\frac{1}{2}\right\}$.

¹Число $\log_5 2$ не является натуральным, так как

$$0 = \log_5 1 < \log_5 2 < \log_5 5 = 1.$$

Задача 9. Найдите сумму корней уравнения

$$5^x + 5^{2-x} = 5261.$$

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$5^x + \frac{25}{5^x} = 5261 \iff (5^x)^2 - 5261 \cdot 5^x + 25 = 0.$$

Полученное уравнение является квадратным относительно 5^x . По теореме Виета,

$$5^{x_1} \cdot 5^{x_2} = 25 \iff 5^{x_1+x_2} = 25 \iff x_1 + x_2 = 2,$$

где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

Ответ: 2.

Задача 10. Решите уравнение

$$2^x + 2^{-x} = 2 \cos 2x. \quad (9)$$

Решение. Способ 1. Умножим обе части уравнения (9) на 2^x , принимая во внимание, что $2^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, и получим равносильное уравнение

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x \cos 2x + 1 = 0. \quad (10)$$

Рассматривая уравнение (10) как квадратное относительно 2^x , устанавливаем, что его решениями будут только те x , которые являются решениями хотя бы одного из уравнений

$$2^x = \cos 2x \pm \sqrt{\cos^2 2x - 1}. \quad (11)$$

Уравнения (11) имеют смысл, если

$$\cos^2 2x - 1 \geq 0 \iff \sin^2 2x \leq 0 \iff \sin 2x = 0 \iff$$

$$\iff 2x = \pi k \iff x = \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, решения уравнений (11) надо искать в множестве чисел $\left\{ \frac{\pi}{2} k \right\}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

При $x = \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$, правая часть уравнений (11) принимает значения ± 1 .

Тогда $2^x = \pm 1$, что возможно лишь, когда $2^x = 1$, т. е. $x = 0$.
Значит, только $x = 0$ является решением уравнения (9).

Способ 2. Уравнение (9) запишем в виде

$$\frac{2^x + 2^{-x}}{2} = \cos 2x. \quad (12)$$

В левой части уравнения (12) выражение является средним арифметическим двух положительных выражений 2^x и 2^{-x} . А среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического. Поэтому при любом действительном x полусумма

$$\frac{2^x + 2^{-x}}{2} \geq \sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = \sqrt{2^0} = 1.$$

Причём равенство возможно, лишь когда

$$2^x = 2^{-x} \iff 2^{2x} = 1 \iff 2x = 0 \iff x = 0.$$

Итак, выражение в левой части равенства (12) больше или равно 1, а достигает наименьшее значение 1 при $x = 0$.

В то же время, $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ при любом x , а

$$\cos 2x = 1 \iff 2x = 2\pi n \iff x = \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, выражение, расположенное в правой части равенства (12), не превышает 1, а равно 1, когда $x = \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Стало быть, равенство (12) имеет место в единственном случае, когда $x = 0$. Уравнение (9) имеет одно решение — число нуль.

Способ 3. То, что в уравнении (12) левая часть не меньше 1, можно установить, найдя наименьшее значение функции

$$f(x) = 2^x + 2^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Производная

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2^x + 2^{-x})' = (2^x)' + (2^{-x})' = \\ &= 2^x \ln 2 + 2^{-x} \ln 2 \cdot (-x)' = (2^x - 2^{-x}) \ln 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

отрицательна при

$$2^x - 2^{-x} < 0 \iff 2^{2x} < 1 \iff 2x < 0 \iff x < 0,$$

равна нулю при

$$2^x - 2^{-x} = 0 \iff 2^{2x} = 1 \iff 2x = 0 \iff x = 0,$$

положительна при

$$2^x - 2^{-x} > 0 \iff 2^{2x} > 1 \iff 2x > 0 \iff x > 0.$$

Следовательно, у функции f одна точка экстремума $x = 0$, которая является точкой минимума. Поэтому в этой точке функция f принимает наименьшее значение:

$$\min_{\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 2^0 + 2^{-0} = 1 + 1 = 2.$$

Тогда выражение в левой части уравнения (12) не меньше 1, а равно 1 при $x = 0$.

Далее решаем, как в способе 2.

Ответ: $\{0\}$.

Задача 11. Решите уравнение

$$5^x + 6^x = 11^x.$$

Решение. Подстановкой $x = 1$ убеждаемся, что 1 является корнем данного уравнения.

Докажем, что уравнение имеет единственное решение.

Для этого почленно разделим его на 11^x и получим равносильное показательное уравнение

$$\left(\frac{5}{11}\right)^x + \left(\frac{6}{11}\right)^x = 1.$$

Показательная функция

$$y(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

при $0 < a < 1$ убывает. Поэтому убывает и функция

$$f(x) = \left(\frac{5}{11}\right)^x + \left(\frac{6}{11}\right)^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

А графики убывающей и постоянной функций (в данном случае f и $g(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$) пересекаются не более, чем в одной точке.

Следовательно, 1 — единственное решение данного уравнения.

Ответ: $\{1\}$.

Задача 12. В зависимости от параметра C определите количество корней уравнения

$$2^x + 2 \cdot 3^x + 3 \cdot 4^x = C. \quad (13)$$

Решение. Как и в задаче 11, будем основываться на свойстве обратимости монотонной функции, в соответствии с которым графики возрастающей (убывающей) и постоянной функций пересекаются не более, чем в одной точке.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = 2^x + 2 \cdot 3^x + 3 \cdot 4^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

и постоянную функцию

$$g(x) = C \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тогда уравнение (13) примет вид

$$f(x) = C.$$

Показательная функция

$$h(x) = p^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

при $p > 1$ возрастает, её множество значений $E(h) = (0; +\infty)$, причём $p^x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ и $p^x \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$.

Следовательно, каждая из функций

$$f_1(x) = 2^x, \quad f_2(x) = 2 \cdot 3^x, \quad f_3(x) = 3 \cdot 4^x$$

возрастает на числовой прямой $(-\infty; +\infty)$, а множества значений $E(f_1) = E(f_2) = E(f_3) = (0; +\infty)$.

Тогда функция-сумма $f = f_1 + f_2 + f_3$ возрастает на числовой прямой $(-\infty; +\infty)$, и её множество значений $E(f) = (0; +\infty)$.

Стало быть, уравнение $f(x) = C$ имеет решение и притом только одно всякий раз, когда параметр $C \in E(f)$, то есть, когда $C > 0$.

Если же $C \leq 0$, то уравнение $f(x) = C$ решений не имеет.

Ответ: один корень при $C > 0$; нет корней при $C \leq 0$.

Задача 13. Найдите все действительные значения параметра c , при каждом из которых уравнение

$$5^{\frac{x}{3}} + 5^{\frac{x}{6}+1} + 2c = 9 - 5^{-\frac{x}{3}} - 5^{1-\frac{x}{6}} \quad (14)$$

имеет решение.

Решение. Уравнение (14) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \left(5^{\frac{x}{3}} + 2 + 5^{-\frac{x}{3}}\right) + 5\left(5^{\frac{x}{6}} + 5^{-\frac{x}{6}}\right) + 2c - 11 &= 0 \iff \\ \iff \left(5^{\frac{x}{6}} + 5^{-\frac{x}{6}}\right)^2 + 5\left(5^{\frac{x}{6}} + 5^{-\frac{x}{6}}\right) + 2c - 11 &= 0. \end{aligned}$$

Пусть

$$5^{\frac{x}{6}} + 5^{-\frac{x}{6}} = y.$$

При этом $y \geq 2$, так как

$$5^{\frac{x}{6}} + 5^{-\frac{x}{6}} = \left(5^{\frac{x}{12}} - 5^{-\frac{x}{12}}\right)^2 + 2 \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Корнями квадратного уравнения

$$y^2 + 5y + 2c - 11 = 0$$

являются числа

$$y_1 = \frac{-5 + \sqrt{69 - 8c}}{2} \quad \text{и} \quad y_2 = -\frac{5 + \sqrt{69 - 8c}}{2}.$$

Только число y_1 может быть больше или равно двум:

$$\begin{aligned} \frac{-5 + \sqrt{69 - 8c}}{2} \geq 2 &\iff \sqrt{69 - 8c} \geq 9 \iff \\ &\iff 69 - 8c \geq 81 \iff c \leq -1,5. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (14) имеет решения при $c \leq -1,5$.

Ответ: $c \leq -1,5$.

Задача 14. Решите уравнение¹

$$|1 - e^x| = 1 - e^x. \quad (15)$$

Решение. Поскольку $|1 - e^x| \geq 0$ при любом действительном x , то в правой части уравнения (15) выражение $1 - e^x \geq 0$.

Но, если $1 - e^x \geq 0$, то $|1 - e^x| = 1 - e^x$.

Поэтому относительно уравнения (15) имеем:

$$\begin{aligned} |1 - e^x| = 1 - e^x &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - e^x \geq 0, \\ |1 - e^x| = 1 - e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - e^x \geq 0, \\ 1 - e^x = 1 - e^x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0. \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; 0]$.

Задача 15. При каких значениях x у функции

$$f(x) = 20 \cdot 2^x - 4^x - 32x \ln 2$$

производная равна нулю?

Решение. Область определения $D(f) = \mathbb{R}$.

Производная

$$\begin{aligned} f'(x) &= (20 \cdot 2^x - 4^x - 32x \ln 2)' = 20 \cdot (2^x)' - (4^x)' - (32x \ln 2)' = \\ &= 20 \cdot 2^x \ln 2 - 4^x \ln 4 - 32 \ln 2 = 2 \ln 2 (10 \cdot 2^x - 4^x - 16) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Уравнение

$$\begin{aligned} 10 \cdot 2^x - 4^x - 16 &= 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2^x - 2)(2^x - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2, \\ 2^x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: 1 и 3.

¹ В общем случае уравнение $|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

Задача 16. Найдите горизонтальную прямую, которую график логарифмической функции

$$f(x) = \log_a x \quad \forall x \in (0; +\infty) \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (16)$$

пересекает под углом: а) 45° ; б) -45° .

*Решение*¹. Сначала докажем, что тангенс угла наклона касательной к графику логарифмической функции (16) в точке (a^b, b) равен $\frac{1}{a^b \ln a}$.

Действительно, абсциссой точки пересечения графика функции (16) с прямой $y = b$ является корень $x = a^b$ уравнения $\log_a x = b$.

Производная логарифмической функции

$$y'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \forall x \in (0; +\infty)$$

при $x = a^b$ принимает значение

$$y'(a^b) = \frac{1}{a^b \ln a}.$$

Значит, тангенс угла наклона касательной к графику логарифмической функции (16) в точке (a^b, b) равен $\frac{1}{a^b \ln a}$.

а). Надо найти такое число b , что

$$\frac{1}{a^b \ln a} = \operatorname{tg} 45^\circ \iff \frac{1}{a^b \ln a} = 1 \iff a^b \ln a = 1.$$

Если $0 < a < 1$, то $\ln a < 0$, и равенство $a^b \ln a = 1$ не выполняется ни при каком b .

Пусть $a > 1$. Тогда $\ln a > 0$, и логарифмируя, получаем, что

$$\begin{aligned} a^b \ln a = 1 &\iff \ln a^b + \ln \ln a = 0 \iff \\ &\iff b \ln a = -\ln \ln a \iff b = -\frac{\ln \ln a}{\ln a}. \end{aligned}$$

¹Если у касательной к графику функции f в точке (x_0, b) угол наклона равен α , то говорят, что график функции f пересекает горизонтальную прямую $y = b$ в точке (x_0, b) под углом α .

Стало быть, при $a > 1$ график логарифмической функции f под углом 45° пересекает горизонтальную прямую $y = -\frac{\ln \ln a}{\ln a}$, а при $0 < a < 1$ такой горизонтальной прямой не существует.

б). Надо найти такое число b , что

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^b \ln a} = \operatorname{tg}(-45^\circ) &\iff \frac{1}{a^b \ln a} = -1 \iff a^b \ln a = -1 \iff \\ &\iff a^b \cdot (-\ln a) = 1 \iff a^b \ln \frac{1}{a} = 1. \end{aligned}$$

Если $0 < a < 1$, то $\ln \frac{1}{a} > 0$, и логарифмируя, получаем, что

$$\begin{aligned} a^b \ln \frac{1}{a} = 1 &\iff \ln a^b + \ln \ln \frac{1}{a} = 0 \iff b \ln a = -\ln \ln \frac{1}{a} \iff \\ &\iff b = -\frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{\ln a} \iff b = \frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{-\ln a} \iff b = \frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{\ln \frac{1}{a}}. \end{aligned}$$

Если $a > 1$, то $\ln \frac{1}{a} < 0$, и равенство $a^b \ln \frac{1}{a} = 1$ не выполняется ни при каком b .

Стало быть, при $0 < a < 1$ график логарифмической функции (16) под углом -45° пересекает горизонтальную прямую

$$y = \frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{\ln \frac{1}{a}},$$

а при $a > 1$ такой горизонтальной прямой не существует.

Ответ: а) не существует при $0 < a < 1$; $y = -\frac{\ln \ln a}{\ln a}$ при $a > 1$;

б) $y = \frac{\ln \ln \frac{1}{a}}{\ln \frac{1}{a}}$ при $0 < a < 1$; не существует при $a > 1$.

§ 2. Логарифмические уравнения

1. Простейшее логарифмическое уравнение

Уравнение вида

$$\log_a f(x) = b \quad \text{при} \quad a > 0 \text{ и } a \neq 1, \quad (1)$$

где b — некоторое действительное число, является *простейшим логарифмическим уравнением*.

Уравнение (1) решается почленным потенцированием.

При этом основываемся на *свойстве обратимости показательной функции*: одному значению аргумента соответствует одно значение показательной функции, и, наоборот, одному значению показательной функции соответствует одно значение аргумента:

$$x_1 = x_2 \iff a^{x_1} = a^{x_2} \quad (a > 0, a \neq 1). \quad (2)$$

В равносильности (2) положим, что

$$x_1 = \log_a f(x) \quad \text{и} \quad x_2 = b.$$

Тогда получим:

$$\log_a f(x) = b \iff a^{\log_a f(x)} = a^b \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Отсюда, с учётом того, что

$$a^{\log_a f(x)} = f(x) \quad \text{при} \quad f(x) > 0, \text{ а степень } a^b > 0,$$

устанавливаем равносильность

$\log_a f(x) = b \iff f(x) = a^b \quad (a > 0, a \neq 1).$
--

 (3)

Равносильность (3) используется при решении простейших логарифмических уравнений (1).

Пример 1. $\log_3(1 - 2x) = 5 \iff 1 - 2x = 3^5 \iff x = -121.$

Пример 2. $\log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{x}\right) = 4 \iff -\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \iff x = -16.$

Пример 3. $\log_5 \log_4 \log_3 \log_2 2^{x^4} = 0 \iff$

$$\iff \log_4 \log_3 \log_2 2^{x^4} = 1 \iff \log_3 \log_2 2^{x^4} = 4 \iff$$

$$\iff \log_2 2^{x^4} = 3^4 \iff x^4 = 3^4 \iff |x| = 3 \iff \begin{cases} x = -3, \\ x = 3. \end{cases}$$

Задача 1. Решите уравнение

$$\log_2(3x - 1) - \log_2(4 - x) = 4 - \log_2(x - 1).$$

Решение. Используя формулу суммы логарифмов, решаем данное уравнение, предварительно приведя его к виду

$$\log_2(3x - 1) + \log_2(x - 1) = 4 + \log_2(4 - x) \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x - 1 > 0, \\ 4 - x > 0, \\ x - 1 > 0, \\ \log_2((3x - 1)(x - 1)) = \log_2(16(4 - x)) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ x < 4, \\ x > 1, \\ (3x - 1)(x - 1) = 16(4 - x) \end{cases} \iff \begin{cases} 1 < x < 4, \\ x^2 + 4x - 21 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 4, \\ (x+7)(x-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 4, \\ \begin{cases} x = -7, \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: $\{3\}$.

Задача 2. Решите уравнение

$$\frac{1 - \lg^2 x^2}{\lg x - 2 \lg^2 x} = \lg x^4 + 5.$$

Решение. Сначала устанавливаем, что уравнение

$$\frac{1 - \lg^2 x^2}{\lg x - 2 \lg^2 x} = \lg x^4 + 5 \Leftrightarrow \frac{1 - 4 \lg^2 x}{\lg x - 2 \lg^2 x} = 4 \lg x + 5.$$

Пусть $\lg x = u$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1 - 4u^2}{u - 2u^2} = 4u + 5 &\Leftrightarrow \frac{(1 - 2u)(1 + 2u)}{u(1 - 2u)} - 4u - 5 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2u \neq 0, \\ \frac{1 + 2u}{u} - 4u - 5 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u \neq 0, 5, \\ \frac{1 + 2u - u(4u + 5)}{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq 0, \\ u \neq 0, 5, \\ 4u^2 + 3u - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u \neq 0, \\ u \neq 0, 5, \\ (u + 1)(4u - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1, \\ u = \frac{1}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Из уравнения $\lg x = -1$ находим, что $x = 0,1$, а уравнение

$$\lg x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{10}.$$

Ответ: $\{0,1; \sqrt[4]{10}\}$.

2. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

По свойству обратимости логарифмической функции, два логарифма $\log_a f(x)$ и $\log_a g(x)$ с одинаковым основанием a ($a > 0$, $a \neq 1$) равны тогда и только тогда, когда положительные выражения $f(x)$ и $g(x)$ равны.

Поэтому логарифмическое уравнение

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

может быть решено с помощью одной из равносильностей:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad (1a)$$

$$(a > 0, a \neq 1);$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad (1б)$$

$$(a > 0, a \neq 1).$$

Пример 1. $\lg(x^3 - x^2 + 2x) - 1 = 3 \lg x \iff$

$$\iff \lg(x^3 - x^2 + 2x) = \lg 10 + 3 \lg x \iff$$

$$\iff \lg(x^3 - x^2 + 2x) = \lg(10x^3) \iff \begin{cases} x > 0, \\ x^3 - x^2 + 2x = 10x^3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > 0, \\ x(9x^2 + x - 2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ 9x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \left(x + \frac{1 + \sqrt{73}}{18}\right) \left(x + \frac{1 - \sqrt{73}}{18}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{73} - 1}{18}.$$

Пример 2. $\lg x + \lg(30 - x) = \lg 19 + \lg 11 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 30 - x > 0, \\ \lg(x(30 - x)) = \lg 209 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 30, \\ x(30 - x) = 209 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 30, \\ (x - 11)(x - 19) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11, \\ x = 19. \end{cases}$$

Пример 3. $2 \lg x = -\lg(6 - x^2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \lg x^2 + \lg(6 - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \lg(x^2(6 - x^2)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2(6 - x^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}, \\ x = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Если учесть, что

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1,$$

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1,$$

то решениями будут $x = \sqrt{2} - 1$ и $x = \sqrt{2} + 1$.

Задача 1. Решите уравнение

$$\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1).$$

Решение. Уравнение равносильно уравнению

$$\begin{aligned}
 \lg \left(2 \left(4^{x-2} + 9 \right) \right) &= \lg \left(10 \left(2^{x-2} + 1 \right) \right) \iff \\
 \iff 2 \left(4^{x-2} + 9 \right) &= 10 \left(2^{x-2} + 1 \right) \iff \\
 \iff \left(2^{x-2} \right)^2 - 5 \cdot 2^{x-2} + 4 &= 0 \iff \\
 \iff \left(2^{x-2} - 1 \right) \left(2^{x-2} - 4 \right) &= 0 \iff \begin{cases} 2^{x-2} = 1, \\ 2^{x-2} = 4 \end{cases} \iff \\
 \iff \begin{cases} x - 2 = 0, \\ x - 2 = 2 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 2, \\ x = 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\{2; 4\}$.

3. Уравнение $\log_a f(x) = \log_b g(x)$

Уравнение

$$\log_a f(x) = \log_b g(x) \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1) \quad (1)$$

выражает равенство двух логарифмов, у которых различные или равные основания.

Уравнение (1) является обобщением уравнений

$$\log_a f(x) = b$$

и

$$\log_a f(x) = \log_a g(x),$$

которые были рассмотрены в предыдущих пунктах.

С помощью преобразований уравнение (1) приводим к уравнению вида, рассмотренного в пункте 2:

$$\log_a f(x) = \log_b g(x) \iff \log_a f(x) = \frac{\log_a g(x)}{\log_a b} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \log_a b \cdot \log_a f(x) = \log_a g(x) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ \log_a f^{\log_a b}(x) = \log_a g(x) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f^{\log_a b}(x) = g(x) \end{cases}$$

при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Итак, получена равносильность решения уравнения (1)

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_b g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f^{\log_a b}(x) = g(x) \end{cases} \quad (2)} \\ (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1).$$

Пример 1. $\log_2 x = \log_3(5 - x^{\log_2 3}) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \log_2 x = \frac{\log_2(5 - x^{\log_2 3})}{\log_2 3} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \log_2 3 \cdot \log_2 x = \log_2(5 - x^{\log_2 3}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \log_2 x^{\log_2 3} = \log_2(5 - x^{\log_2 3}) \Longleftrightarrow x^{\log_2 3} = 5 - x^{\log_2 3} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2x^{\log_2 3} = 5 \Longleftrightarrow x^{\log_2 3} = \frac{5}{2}.$$

Логарифмированием по основанию 2 получаем уравнение

$$\log_2 3 \cdot \log_2 x = \log_2 5 - 1 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \log_2 x &= \frac{\log_2 5 - 1}{\log_2 3} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{\log_2 5 - 1}{\log_2 3}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= 2^{\frac{\log_2 5}{\log_2 3} - \frac{1}{\log_2 3}} \Leftrightarrow x = 2^{\log_3 5 - \log_3 2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Уравнение $\ln x = \lg x \Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln x}{\ln 10} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\ln 10 - 1) \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

При $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ и $b \neq a$, уравнение

$$\log_a x = \log_b x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\ln b - \ln a) \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Отсюда, в частности, следует

Свойство 1. *Графики логарифмических функций*

$$f(x) = \log_a x \quad \text{и} \quad g(x) = \log_b x, \quad D(f) = D(g) = (0; +\infty),$$

при $a \neq b$ пересекаются в одной точке $(1, 0)$.

4. Логарифмические уравнения с неизвестной в основании логарифма

Логарифмическое уравнение

$$\log_{h(x)} f(x) = b \quad (b \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

при каждом фиксированном значении аргумента x таком, что $f(x) > 0$ и $f(x) \neq 1$, является простейшим логарифмическим уравнением.

В соответствии с равносильностью (3.1) решения уравнения (1.1) получаем, что уравнение

$$\log_{h(x)} f(x) = b \iff \begin{cases} h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) = h^b(x). \end{cases} \quad (2)$$

В соответствии с равносильностными переходами (1а) и (1б) из пункта 2 получаем, что уравнение

$$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \iff \begin{cases} h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x) > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Пример 1. В соответствии с равносильностью (2) уравнение

$$\log_x 2401 = 4 \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 2401 = x^4 \end{cases} \iff x = \sqrt[4]{2401} \iff x = 7.$$

Иначе, учитывая, что $2401 = 7^4$, получим

$$\log_x 7^4 = 4 \iff 4 \log_x 7 = 4 \iff \log_x 7 = 1 \iff x = 7.$$

Пример 2. Логарифмическое уравнение

$$\begin{aligned} \log_{x-3}(2x^2 - 11x - 5) = 2 &\iff \\ \iff \begin{cases} x - 3 > 0, \\ x - 3 \neq 1, \\ 2x^2 - 11x - 5 = (x - 3)^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} x > 3, \\ x \neq 4, \\ x^2 - 5x - 14 = 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} x > 3, \\ x \neq 4, \\ (x + 2)(x - 7) = 0 \end{cases} &\iff x = 7. \end{aligned}$$

Задача 1. Решите уравнение

$$\begin{aligned} \log_7 x - \log_7 \frac{1}{x} + \log_{\frac{1}{7}} x + \log_{\frac{1}{x}} \frac{1}{7} &= \\ = \log_{\frac{1}{7}}^2 \frac{1}{x} + \log_x^2 \frac{1}{7} + \log_x^2 7 - \log_{\frac{1}{x}}^2 7 - \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Решение. Уравнение приведём к виду

$$\begin{aligned} \log_7 x + \log_7 x - \log_7 x + \log_x 7 &= \log_7^2 x + \log_x^2 7 + \log_x^2 7 - \log_x^2 7 - \frac{7}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_7 x + \log_x 7 &= \log_7^2 x + \log_x^2 7 - \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\log_7 x + \log_x 7 = y.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\log_7 x + \log_x 7)^2 = y^2 &\Leftrightarrow \log_7^2 x + 2 \log_7 x \log_x 7 + \log_x^2 7 = y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_7^2 x + \log_x^2 7 &= y^2 - 2. \end{aligned}$$

Получаем квадратное уравнение

$$y = y^2 - 2 - \frac{7}{4} \Leftrightarrow 4y^2 - 4y - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1,5, \\ y = 2,5. \end{cases}$$

Уравнение

$$\log_7 x + \log_x 7 = -1,5 \Leftrightarrow \log_7 x + \frac{1}{\log_7 x} = -1,5$$

и не имеет решений, так как модуль суммы двух взаимно обратных чисел не меньше 2.

Уравнение

$$\log_7 x + \log_x 7 = 2,5 \Leftrightarrow \log_7 x + \frac{1}{\log_7 x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_7 x + \frac{1}{\log_7 x} = 2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_7 x = \frac{1}{2}, \\ \log_7 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{7}, \\ x = 49. \end{cases}$$

Ответ: $\{\sqrt{7}, 49\}$.

Задача 2. Решите уравнение

$$\log_{x+1}|x^2 - 5x + 6| = 2. \quad (4)$$

Решение. Уравнение (4) имеет смысл при

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ (x-2)(x-3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0, \\ 0 < x < 2, \\ 2 < x < 3, \\ x > 3. \end{cases}$$

Квадратичная функция

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

является отрицательной на интервале $(2; 3)$ и положительной на числовых лучах $(-\infty; 2)$ и $(3; +\infty)$.

Поэтому уравнение (4) равносильно совокупности двух уравнений.

При $x \in (2; 3)$ уравнение (4) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \log_{x+1}(-x^2 + 5x - 6) = 2 &\Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 7 = 0, \end{aligned}$$

которое не имеет решения, так как у него отрицательный дискриминант $D = 9 - 56 = -47$.

При $x \in (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (3; +\infty)$ уравнение (4) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \log_{x+1}(x^2 - 5x + 6) = 2 &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{\frac{5}{7}\right\}$.

Задача 3. Относительно x решите уравнение

$$2 \log_x a + \log_{ax} a + 3 \log_{a^2 x} a = 0. \quad (5)$$

Решение. Уравнение имеет смысл, когда

$$a > 0, x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{a}, x \neq \frac{1}{a^2}.$$

При этих условиях уравнение (5) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \frac{2}{\log_a x} + \frac{1}{\log_a(ax)} + \frac{3}{\log_a(a^2 x)} &= 0 \iff \\ \iff \frac{2}{\log_a x} + \frac{1}{1 + \log_a x} + \frac{3}{2 + \log_a x} &= 0. \end{aligned}$$

Используя подстановку $\log_a x = y$, получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{2}{y} + \frac{1}{y+1} + \frac{3}{y+2} &= 0 \iff \\ \iff \frac{2(y+1)(y+2) + y(y+2) + 3y(y+1)}{y(y+1)(y+2)} &= 0 \iff \\ \iff \frac{6y^2 + 11y + 4}{y(y+1)(y+2)} = 0 &\iff \frac{(3y+4)(2y+1)}{y(y+1)(y+2)} = 0, \end{aligned}$$

решениями которого будут $y = -1\frac{1}{3}$ и $y = -\frac{1}{2}$.

Тогда

$$\log_a x = -\frac{4}{3} \iff x = a^{-\frac{4}{3}} \quad \text{и} \quad \log_a x = -\frac{1}{2} \iff x = a^{-\frac{1}{2}}.$$

Уравнения

$$a^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{a} \iff \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} - \frac{1}{a} = 0 \iff \frac{1 - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} = 0 \iff$$

$$\Longleftrightarrow a^{\frac{1}{3}} = 1 \Longleftrightarrow a = 1;$$

$$a^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{a^2} \Longleftrightarrow \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} - \frac{1}{a^2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{a^{\frac{2}{3}} - 1}{a^2} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a^{\frac{2}{3}} = 1 \Longleftrightarrow |a| = 1;$$

$$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \Longleftrightarrow \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{a} = 0 \Longleftrightarrow \frac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{a} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a^{\frac{1}{2}} = 1 \Longleftrightarrow a = 1;$$

$$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^2} \Longleftrightarrow \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{a^2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{a^{\frac{3}{2}} - 1}{a^2} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a^{\frac{3}{2}} = 1 \Longleftrightarrow a = 1.$$

Следовательно, для $x = a^{-\frac{4}{3}}$ и $x = a^{-\frac{1}{2}}$ ограничения $x \neq \frac{1}{a}$, $x \neq \frac{1}{a^2}$ при $a > 0$ означают, что $a \neq 1$.

Итак, решениями уравнения (5) будут $x = a^{-\frac{4}{3}}$ и $x = a^{-\frac{1}{2}}$ при условии, что $a > 0$ и $a \neq 1$.

Ответ. $\emptyset$ при $a \leq 0$ и при $a = 1$; $\left\{ a^{-\frac{4}{3}}; a^{-\frac{1}{2}} \right\}$ при $a > 0$, $a \neq 1$.

5. Показательно-степенные уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное в основании и показателе степени,

$$f^{\varphi(x)}(x) = g^{\psi(x)}(x) \quad (1)$$

назовём *показательно-степенным*.

Уравнение (1) определено при $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, когда выражения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют смысл.

Показательно-степенные уравнения (1) решаются, как правило, логарифмированием обеих частей.

Пример 1. Показательно-степенное уравнение

$$x^x = 1 \iff \ln x^x = \ln 1 \iff x \ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1.$$

Пример 2. $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5 \iff x^{\log_x \sqrt{x^2-1}} = 5 \iff$

$$\iff \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \sqrt{x^2-1} = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^2 - 1 = 25 \end{cases} \iff x = \sqrt{26}.$$

Пример 3. $x^{\frac{1}{\lg x}} = 10 \iff x^{\log_x 10} = 10 \iff$

$$\iff \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 10 = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x > 1. \end{cases}$$

Корнями уравнения

$$h^{\varphi(x)}(x) = h^{\psi(x)}(x)$$

считаются только решения смешанной системы

$$\begin{cases} h(x) > 0, \\ \varphi(x) = \psi(x) \end{cases}$$

и те значения x , для которых $h(x) = 1$, если при этих значениях определены показатели степеней $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Пример 4. Решим уравнение

$$(x^2 - 1)^{\log_{\sqrt{23}} \sqrt{x+2}} = (x^2 - 1)^{\log_{23} (2x-1)}. \quad (2)$$

Система

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ \log_{\sqrt{23}} \sqrt{x+2} = \log_{23} (2x-1) \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} x^2 > 1, \\ \log_{23} (x+2) = \log_{23} (2x-1) \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} |x| > 1, \\ 2x-1 > 0, \\ x+2 = 2x-1 \end{cases} \iff x = 3. \end{aligned}$$

Уравнение

$$x^2 - 1 = 1 \iff x^2 = 2 \iff |x| = \sqrt{2} \iff x = \pm \sqrt{2}.$$

Показатели степеней

$$\log_{\sqrt{23}} \sqrt{x+2} \quad \text{и} \quad \log_{23} (2x-1)$$

определены при

$$\begin{cases} x+2 > 0, \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -2, \\ x > 0,5 \end{cases} \iff x > 0,5.$$

Поскольку $-\sqrt{2} < 0,5$, а $\sqrt{2} > 0,5$, то $x = -\sqrt{2}$ корнем уравнения (2) не является, а $x = \sqrt{2}$ будет корнем уравнения (2).

Итак, уравнение (2) имеет два корня $x = \sqrt{2}$ и $x = 3$.

Задача 1. Решите уравнение

$$(3 \lg x)^{\lg^2 x + 2 \lg x + 5} = \lg x^3.$$

Решение. Уравнение приведём к виду

$$(3 \lg x)^{\lg^2 x + 4 \lg x + 5} = 3 \lg x.$$

Пусть $\lg x = u$. Тогда

$$(3u)^{u^2+4u+5} = 3u \iff (3u)^{u^2+4u+4} = 1 \iff (3u)^{(u+2)^2} = 1 \iff$$

$$\iff (u+2)^2 \lg 3u = 0 \iff \lg 3u = 0 \iff u = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, $\lg x = \frac{1}{3}$, а значит, $x = \sqrt[3]{10}$.

Ответ: $\{\sqrt[3]{10}\}$.

Задача 2. Решите уравнение

$$\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} \log_2 x} = 2^{\frac{1}{4} \log_2^2 x}.$$

Решение. Способ 1. Логарифмируя по основанию 2, получаем

$$\log_2 \frac{1}{2} + \log_2 x^{\frac{1}{2} \log_2 x} = \frac{1}{4} \log_2^2 x \log_2 2 \iff$$

$$\iff -1 + \frac{1}{2} \log_2 x \log_2 x = \frac{1}{4} \log_2^2 x \iff \log_2^2 x = 4 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \log_2 x = -2, \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0,25, \\ x = 4. \end{cases}$$

Способ 2. Пусть $\frac{1}{2} \log_2 x = u$. Тогда $\log_2 x = 2u$, а $x = 2^{2u}$.

Получим уравнение

$$\frac{1}{2}(2^{2u})^u = 2^{u^2} \iff 2^{2u^2-1} = 2^{u^2} \iff 2u^2 - 1 = u^2 \iff u^2 = 1,$$

решениями которого будут $u = \pm 1$.

Из уравнений

$$\frac{1}{2} \log_2 x = -1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \log_2 x = 1$$

соответственно находим, что $x = 0,25$ и $x = 4$.

Ответ: $\{0,25; 4\}$.

Задача 3. Решите уравнение

$$6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12. \quad (3)$$

Решение. Поскольку

$$6^{\log_6^2 x} = \left(6^{\log_6 x}\right)^{\log_6 x} = x^{\log_6 x} \quad \forall x \in (0; +\infty),$$

то уравнение (3) равносильно уравнению

$$x^{\log_6 x} + x^{\log_6 x} = 12 \iff x^{\log_6 x} = 6.$$

Логарифмируя по основанию x , получаем равносильное уравнение

$$\log_6 x \log_6 x = \log_6 6 \iff \log_6^2 x = 1 \iff |\log_6 x| = 1 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \log_6 x = -1, \\ \log_6 x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{6}, \\ x = 6. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{6}, 6\right\}$.

6. Задачи

Задача 1. Решите уравнение

$$\log_6 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2} \log_6(x-11) = 1. \quad (1)$$

Решение. Уравнение (1) имеет смысл, когда $x-2 > 0$, $x-11 > 0$, т.е. когда $x > 11$. При этом $\log_6 \sqrt{x-2} = \frac{1}{2} \log_6(x-2)$.

С учётом этих свойств уравнение (1) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_6(x-2) + \frac{1}{2} \log_6(x-11) &= 1 \iff \\ \iff \log_6(x-2) + \log_6(x-11) &= 2 \iff \\ \iff \begin{cases} x > 11, \\ \log_6((x-2)(x-11)) = 2 \end{cases} &\iff \begin{cases} x > 11, \\ (x-2)(x-11) = 36 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} x > 11, \\ x^2 - 13x - 14 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x > 11, \\ (x+1)(x-14) = 0 \end{cases} \iff x = 14. \end{aligned}$$

Ответ: $\{14\}$.

Задача 2. Решите уравнение

$$\log_3 \sqrt{x+1} + \frac{1}{2} \log_3(x^2 - x + 1) = 1. \quad (2)$$

Решение. Так как

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

то уравнение (2) имеет смысл, когда $x > -1$.

Имеет место тождество

$$\log_3 \sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \log_3(x+1) \quad \forall x \in (-1; +\infty).$$

Следовательно, уравнение (2) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_3(x+1) + \frac{1}{2} \log_3(x^2 - x + 1) &= 1 \iff \\ \iff \log_3(x+1) + \log_3(x^2 - x + 1) &= 2 \iff \\ \iff \log_3((x+1)(x^2 - x + 1)) &= 2 \iff \log_3(x^3 + 1) = 2 \iff \\ \iff x^3 + 1 = 9 \iff x^3 &= 8 \iff x = 2. \end{aligned}$$

Ответ: $\{2\}$.

Задача 3. Решите уравнение

$$1 + |\log_4(9x^2 - 39x + 43)| = |\cos((x-2)\cos x)|. \quad (3)$$

Решение. По свойству ограниченности косинуса выражение в правой части равенства (3) не превосходит единицы:

$$|\cos((x-2)\cos x)| \leq 1. \quad (4)$$

В соответствии с определением модуля выражение в левой части равенства (3) не меньше единицы:

$$1 + |\log_4(9x^2 - 39x + 43)| \geq 1. \quad (5)$$

Причём оценки (4) и (5) должны иметь место при всех тех значениях переменной x , при которых равенство (3) имеет смысл.

Основываясь на оценках (4) и (5), заключаем, что уравнение (3) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \log_4(9x^2 - 39x + 43) = 0, \\ |\cos((x-2)\cos x)| = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Уравнение

$$\begin{aligned} \log_4(9x^2 - 39x + 43) = 0 &\iff 9x^2 - 39x + 43 = 1 \iff \\ \iff 9x^2 - 39x + 42 = 0 &\iff 3x^2 - 13x + 14 = 0 \iff \end{aligned}$$

$$\iff (x-2)(3x-7)=0 \iff \begin{cases} x=2, \\ x=2\frac{1}{3}. \end{cases}$$

При $x = 2$ из второго уравнения системы (6) получаем, что $|\cos(0 \cos 2)| = 1$, т.е. $|\cos 0| = 1$, что верно.

Подставляя $x = 2\frac{1}{3}$ во второе уравнение системы (6), получаем: $\left|\cos\left(\frac{1}{3} \cos \frac{7}{3}\right)\right| = 1$, что неверно.

Ответ: $\{2\}$.

Задача 4. Решите уравнение

$$(x^2 + 4) \lg \sin^2 3x + x^2 \lg \cos^2 2x = 4 \lg(\cos 2x \sin^3 3x).$$

Решение. Уравнение

$$(x^2 + 4) \lg \sin^2 3x + x^2 \lg \cos^2 2x = 4 \lg(\cos 2x \sin^3 3x) \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos 2x \sin^3 3x > 0, \\ 2(x^2 + 4) \lg |\sin 3x| + 2x^2 \lg |\cos 2x| - \\ - 4(\lg |\cos 2x| + 3 \lg |\sin 3x|) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos 2x \sin 3x > 0, \\ (x^2 - 2) \lg |\sin 3x| + (x^2 - 2) \lg |\cos 2x| = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos 2x \sin 3x > 0, \\ (x^2 - 2) \lg(|\sin 3x| \cdot |\cos 2x|) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - 2 = 0, \\ \cos 2x \sin 3x > 0, \\ \lg(\sin 3x \cos 2x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = \sqrt{2}, \\ \cos 2x \sin 3x > 0, \\ \sin 3x \cos 2x = 1. \end{cases}$$

Система

$$\begin{cases} |x| = \sqrt{2}, \\ \cos 2x \sin 3x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ x = \sqrt{2}, \end{cases} & \iff x = \sqrt{2}. \\ \cos 2x \sin 3x > 0 \end{cases}$$

При этом было учтено:

$$\pi < 3,14 < 3\sqrt{2} < 3 \cdot 1,5 < 3 \cdot \frac{\pi}{2} \implies \sin 3\sqrt{2} < 0;$$

$$\frac{\pi}{2} < 1,6 < 2\sqrt{2} < 2 \cdot 1,5 < \pi \implies \cos 2\sqrt{2} < 0,$$

а значит,

$$\sin(-3\sqrt{2}) \cos(-2\sqrt{2}) = -\sin(3\sqrt{2}) \cos(2\sqrt{2}) < 0.$$

Уравнение (с учётом, что $|\sin \alpha| \leq 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$)

$$\cos 2x \sin 3x = 1 \iff \sin x + \sin 5x = 2 \iff \begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 5x = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\pi n \end{cases} \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \sqrt{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right\} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

Задача 5. Решите уравнение

$$\frac{1}{2} \log_3(-x-16) - \log_3(\sqrt{-x}-4) = 1. \quad (7)$$

Решение. Уравнение (7) имеет смысл при

$$\begin{cases} -x-16 > 0, \\ \sqrt{-x}-4 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -16, \\ \sqrt{-x} > 4 \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -16, \\ -x > 16 \end{cases} \Leftrightarrow x < -16.$$

Тогда уравнение (7) равносильно уравнению

$$\log_3 \sqrt{-x-16} - \log_3(\sqrt{-x}-4) = 1 \Leftrightarrow \log_3 \frac{\sqrt{-x-16}}{\sqrt{-x}-4} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{-x-16}}{\sqrt{-x}-4} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -16, \\ \sqrt{-x-16} = 3(\sqrt{-x}-4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -16, \\ -x-16 = 9(-x-8\sqrt{-x}+16) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -16, \\ -x-9\sqrt{-x}+20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -16, \\ (\sqrt{-x}-4)(\sqrt{-x}-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -25.$$

Ответ: $\{-25\}$.

Задача 6. Решите уравнение

$$\log_{\sin x} \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) + \log_{\sin x} \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = \log_{\sin x} 0,03. \quad (8)$$

Решение. Уравнение (8) имеет смысл при

$$\frac{1}{2} < \sin x < 1, \quad \cos x > \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Уравнение (8) при условиях (9) равносильно уравнению

$$\left(\cos x - \frac{1}{2} \right) \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0,03,$$

которое приводим к виду

$$\sin x \cos x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + 0,22 = 0. \quad (10)$$

Пусть $\sin x + \cos x = y$. Тогда $y^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$, а значит,

$$\sin x \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}.$$

Получаем квадратное уравнение

$$\frac{y^2 - 1}{2} - \frac{1}{2}y + 0,22 = 0 \iff y^2 - y - 0,56 = 0 \iff \begin{cases} y = -0,4, \\ y = 1,4. \end{cases}$$

Из условий (9) следует, что $\sin x + \cos x > 1$. Поэтому уравнение (10) равносильно уравнению

$$\sin x + \cos x = 1,4. \quad (11)$$

Подстановкой $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$ уравнение (11) приводим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2} &= 1,4 \iff 2,4z^2 - 2z + 0,4 = 0 \iff \\ \iff 6z^2 - 5z + 1 &= 0 \iff (2z-1)(3z-1) = 0 \iff \begin{cases} z = \frac{1}{3}, \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Если } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}, \text{ то } \sin x = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Если } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}, \text{ то } \sin x = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

Решениями простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x = \frac{3}{5} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{4}{5},$$

удовлетворяющими условию (9), соответственно являются

$$x = \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi k \quad \text{и} \quad x = \arcsin \frac{4}{5} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi k, \arcsin \frac{4}{5} + 2\pi k \right\} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 7. Решите уравнение

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{2}{5}}(x-1) - \log_{\frac{2}{5}}(x-10) = 1. \quad (12)$$

Решение. Уравнение (12) имеет смысл при $x-1 > 0$ и $x-10 > 0$, т.е. когда $x > 10$, и равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \log_{\frac{2}{5}}(x-1) - 2 \log_{\frac{2}{5}}(x-10) = 2 &\iff \begin{cases} x > 10, \\ \log_{\frac{2}{5}} \frac{x-1}{(x-10)^2} = 2 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} x > 10, \\ \frac{x-1}{(x-10)^2} = \frac{4}{25} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 10, \\ \frac{25(x-1) - 4(x-10)^2}{(x-10)^2} = 0 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} x > 10, \\ 25(x-1) - 4(x-10)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 10, \\ 4x^2 - 105x + 425 = 0 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} x > 10, \\ (x-5)(4x-85) = 0 \end{cases} \iff x = 21\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 21\frac{1}{4} \right\}.$$

Задача 8. Решите уравнение

$$3 + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1) = 3|\cos((x-1)\cos 2x)|. \quad (13)$$

Решение. Поскольку при любом действительном x

$$3 + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1) \geq 3, \quad \text{а} \quad 3|\cos((x-1)\cos 2x)| \leq 3,$$

то уравнение (13) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1) = 0, \\ |\cos((x-1)\cos 2x)| = 1. \end{cases} \quad (14)$$

Из первого уравнения находим, что

$$x^2 - x + 1 = 1 \iff x(x-1) = 0 \iff \begin{cases} x = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

Если $x = 0$, то из второго уравнения системы (14) получаем равенство $|\cos(-1 \cdot \cos 0)| = 1$, которое неверно.

Если $x = 1$, то из второго уравнения системы (14) получаем верное равенство $|\cos 0| = 1$.

Значит, $x = 1$ — единственное решение системы (14), и, следовательно, $x = 1$ — единственный корень уравнения (13).

Ответ: $\{1\}$.

Задача 9. Решите уравнение

$$\cos^2(x \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1}. \quad (15)$$

Решение. Уравнение (15) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} + (1 - \cos^2(x \sin x)) &= 0 \iff \\ \iff \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} + \sin^2(x \sin x) &= 0 \iff \\ \iff \begin{cases} \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 0, \\ \sin^2(x \sin x) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Из первого уравнения системы (16) находим, что

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 1} &= 1 \iff x^2 + x + 1 = 1 \iff \\ \iff x(x+1) &= 0 \iff \begin{cases} x = 0, \\ x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Если $x = 0$, то из второго уравнения системы (16) получаем верное равенство $\sin^2(0 \cdot \sin 0) = 0$.

Если $x = -1$, то из второго уравнения системы (16) получаем равенство $\sin^2(-1 \cdot \sin(-1)) = 0$, которое неверно.

Значит, $x = 0$ — единственное решение системы (16), и, следовательно, $x = 0$ — единственный корень уравнения (15).

Ответ: $\{0\}$.

Задача 10. Найдите интервал, содержащий хотя бы один корень уравнения

$$x(1 - \lg 5) - \lg \frac{8}{17} = \lg \left(4^x + \frac{1}{4} \right):$$

$1) (-7,3; -5); 2) (-4,5; -2,5); 3) (-2,5; -0,5);$ $4) (-0,5; 0,5).$
--

Решение. Выражение $x(1 - \lg 5)$ представим в виде десятичного логарифма:

$$x(1 - \lg 5) = x(\lg 10 - \lg 5) = x \lg 2 = \lg 2^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тогда получим равносильное уравнение

$$\lg 2^x - \lg \frac{8}{17} = \lg \left(4^x + \frac{1}{4} \right).$$

Потенцируя по основанию 10, находим:

$$2^x : \frac{8}{17} = 4^x + \frac{1}{4} \iff 8 \cdot (2^x)^2 - 17 \cdot 2^x + 2 = 0 \iff$$

$$\iff (8 \cdot 2^x - 1)(2^x - 2) = 0 \iff \begin{cases} 2^x = \frac{1}{8}, \\ 2^x = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3, \\ x = 1. \end{cases}$$

Стало быть, множеством решений будет $\{-3; 1\}$.

Корень $x = 1$ не принадлежит ни одному из указанных интервалов, а корень $x = -3$ принадлежит интервалу $(-4,5; -2,5)$.

Ответ: 2).

Задача 11. Решите уравнение

$$\log_2(10x - 8) \cdot (\log_x 2x - \log_2 x^2) = 0. \quad (17)$$

Решение. Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда равно нулю хотя бы один из сомножителей, при условии, что произведение имеет смысл.

Поэтому уравнение (17) равносильно совокупности, состоящей из двух систем:

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ \log_2(10x - 8) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 1, \\ 10x - 8 = 1 \end{cases} \iff x = 0,9$$

и

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x > 0,8, \\ \log_x 2x - \log_2 x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0,8, \\ \frac{\log_2 2x}{\log_2 x} - 2 \log_2 x = 0 \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} x > 0,8, \\ \frac{1 + \log_2 x - 2 \log_2^2 x}{\log_2 x} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0,8, \\ \log_2 x \neq 0, \\ 2 \log_2^2 x - \log_2 x - 1 = 0 \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} x > 0,8, \\ \log_2 x \neq 0, \\ (2 \log_2 x + 1)(\log_2 x - 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0,8, \\ \begin{cases} \log_2 x^2 = -1, \\ \log_2 x = 1. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнение

$$\log_2 x^2 = -1 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ни один корень этого уравнения не является корнем уравнения (17), так как $-\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$, а

$$50 < 64 \iff 5\sqrt{2} < 8 \iff \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{8}{10}.$$

Корень $x = 2$ уравнения $\log_2 x = 1$ является корнем уравнения (17), так как он больше 0,8.

Следовательно, уравнение (17) имеет два корня $x = 0,9$ и $x = 2$.

Ответ: $\{0,9; 2\}$.

Задача 12. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_9(9x^8)} \cdot \sqrt{\log_3(9x)} = \log_3 x^3. \quad (18)$$

Решение. Уравнение (18) определено при

$$\begin{cases} \log_9(9x^8) \geq 0, \\ \log_3(9x) \geq 0, \\ \log_3 x^3 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9x^8 \geq 1, \\ 9x \geq 1, \\ x^3 \geq 1 \end{cases} \iff x \geq 1.$$

Поэтому уравнение (18) равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ \log_9(9x^8) \cdot \log_3(9x) = \log_3^2 x^3. \end{cases} \quad (19)$$

Уравнение системы (19) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} (1 + 8 \log_9 x)(2 + \log_3 x) &= 9 \log_3^2 x \iff \\ \iff (1 + 4 \log_3 x)(2 + \log_3 x) &= 9 \log_3^2 x \iff \\ \iff 5 \log_3^2 x - 9 \log_3 x - 2 &= 0 \iff (\log_3 x - 2) \left(\log_3 x + \frac{1}{5} \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, система (19), а значит, и уравнение (18) равносильны простейшему логарифмическому уравнению

$$\log_3 x = 2 \iff x = 9.$$

Ответ: $\{9\}$.

Задача 13. Решите уравнение

$$\frac{\frac{3}{2} \lg 3 + \lg(x+1)}{\lg(5x-1) + \lg(x+3) + \lg 6} = \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Решение. Уравнение (20) приводим к виду

$$\frac{3 \lg 3 + 2 \lg(x+1) - \lg(5x-1) - \lg(x+3) - \lg 6}{\lg(5x-1) + \lg(x+3) + \lg 6} = 0.$$

Следовательно, при условии

$$\lg(5x-1) + \lg(x+3) + \lg 6 \neq 0 \quad (21)$$

уравнение (20) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} 3 \lg 3 + 2 \lg(x+1) - \lg(5x-1) - \lg(x+3) - \lg 6 = 0 &\iff \\ \iff \begin{cases} x+1 > 0, \\ 5x-1 > 0, \\ x+3 > 0, \\ \lg \frac{9(x+1)^2}{2(5x-1)(x+3)} = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ \frac{9(x+1)^2}{2(5x-1)(x+3)} = 1 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ \frac{9(x+1)^2 - 2(5x-1)(x+3)}{2(5x-1)(x+3)} = 0 \end{cases} &\iff \\ \iff \begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ (5x-1)(x+3) \neq 0, \\ 9(x+1)^2 - 2(5x-1)(x+3) = 0 \end{cases} &\iff \\ \iff \begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ x^2 + 10x - 15 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ \begin{cases} x = -(5 + 2\sqrt{10}), \\ x = -5 + 2\sqrt{10} \end{cases} \end{cases} \iff \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow x = -5 + 2\sqrt{10},$$

так как

$$\begin{aligned} 250 > 169 &\Longleftrightarrow 5\sqrt{10} > 13 \Longleftrightarrow 2\sqrt{10} > \frac{26}{5} \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow 2\sqrt{10} > 5 + \frac{1}{5} \Longleftrightarrow -5 + 2\sqrt{10} > \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Условие (21) выполняется, так как произведение $(5x-1)(x+3)$ при $x = -5 + 2\sqrt{10}$ равно

$$\begin{aligned} (-25 + 10\sqrt{10} - 1)(-5 + 2\sqrt{10} + 3) &= 4(13 - 5\sqrt{10})(1 - \sqrt{10}) = \\ &= 4(13 - 13\sqrt{10} - 5\sqrt{10} + 50) = 4(63 - 18\sqrt{10}) = 36(7 - 2\sqrt{10}). \end{aligned}$$

Ответ: $\{-5 + 2\sqrt{10}\}$.

Задача 14. Решите уравнение

$$\lg \sin \frac{x}{2} = \lg(\cos x - \sin x) + \lg(\cos x + \sin x). \quad (22)$$

Решение. В соответствии с определением логарифма уравнение (22) имеет смысл, когда

$$\sin \frac{x}{2} > 0, \quad \cos x - \sin x > 0, \quad \cos x + \sin x > 0. \quad (23)$$

На множестве задания, являющемся множеством решений системы неравенств (23), уравнение (22) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \lg \sin \frac{x}{2} &= \lg((\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \lg \sin \frac{x}{2} = \lg(\cos^2 x - \sin^2 x) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \lg \sin \frac{x}{2} = \lg \cos 2x \Longleftrightarrow \sin \frac{x}{2} = \cos 2x. \end{aligned}$$

Тригонометрическое уравнение

$$\begin{aligned} \sin \frac{x}{2} = \cos 2x &\iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos 2x \iff \\ &\iff \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \pm 2x + 2\pi k \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi k, \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{4}{5}\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Функция

$$y_1(x) = \sin \frac{x}{2}, \quad D(y_1) = \mathbb{R},$$

является 4π -периодической, а функции

$$y_2(x) = \cos x - \sin x \quad \text{и} \quad y_3(x) = \cos x + \sin x, \quad D(y_2) = D(y_3) = \mathbb{R},$$

являются 2π -периодическими.

Поэтому у функций y_1 , y_2 и y_3 общий наименьший положительный период равен 4π .

Тогда, если x_0 — корень уравнения (22), то $x_0 + 4\pi k$ также будет корнем уравнения (22) при любом целом k .

Множество корней уравнения (22) находится 4π -периодическим продолжением тех корней уравнения (22), которые принадлежат полуинтервалу $[0; 4\pi)$.

Из чисел

$$-\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

полуинтервалу $[0; 4\pi)$ принадлежат

$$\pi, \quad \frac{7\pi}{3} \quad \text{и} \quad \frac{11\pi}{3}.$$

Ни одно из этих чисел не является корнем уравнения (22), так как не выполняются условия (23):

$$\cos \pi - \sin \pi = -1 < 0;$$

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} < 0;$$

$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Из чисел

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4}{5}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

полуинтервалу $[0; 4\pi)$ принадлежат

$$\frac{\pi}{5}, \pi, \frac{9\pi}{5}, \frac{13\pi}{5} \quad \text{и} \quad \frac{17\pi}{5}.$$

Так как условия (23) выполняются лишь при $x = \frac{\pi}{5}$ и $x = \frac{9\pi}{5}$, то решениями уравнения (22) будут только

$$x = \frac{\pi}{5} + 4\pi k \quad \text{и} \quad x = \frac{9\pi}{5} + 4\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

В самом деле, при $x = \frac{\pi}{5}$ значения:

$$\sin \frac{\pi}{10} > 0; \quad \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} > 0;$$

$$\cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} > \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{5} > \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

При $x = \pi$ значение $\cos \pi - \sin \pi = -1 < 0$.

При $x = \frac{9\pi}{5}$ значения: $\sin \frac{9\pi}{10} > 0$;

$$\cos \frac{9\pi}{5} - \sin \frac{9\pi}{5} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} > 0;$$

$$\cos \frac{9\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{5} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} > 0.$$

При $x = \frac{13\pi}{5}$ значение $\sin \frac{13\pi}{10} = \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{10}\right) = -\sin \frac{3\pi}{10} < 0$.

При $x = \frac{17\pi}{5}$ значение $\sin \frac{17\pi}{10} = \sin\left(2\pi - \frac{3\pi}{10}\right) = -\sin \frac{3\pi}{10} < 0$.

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{5} + 4\pi k, \frac{9\pi}{5} + 4\pi k \right\} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Задача 15. Решите уравнение

$$\log_7(x^2 - 7x + 11) \cdot \log_{\frac{8}{9}}(9x - x^2 - 17) = 0. \quad (24)$$

Решение. Произведение двух выражений равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, при условии, что другой сомножитель имеет смысл.

Поэтому в соответствии с определением логарифма уравнение (24) равносильно совокупности двух систем.

Первая система

$$\begin{aligned} \begin{cases} \log_7(x^2 - 7x + 11) = 0, \\ 9x - x^2 - 17 > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x^2 - 7x + 11 = 1, \\ x^2 - 9x + 17 < 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} (x-2)(x-5) = 0, \\ x^2 - 9x + 17 < 0 \end{cases} \iff x = 5, \end{aligned}$$

так как $2^2 - 9 \cdot 2 + 17 = 3 > 0$, $5^2 - 9 \cdot 5 + 17 = -3 < 0$.

Вторая система

$$\begin{aligned} \begin{cases} \log_{\frac{8}{9}}(9x - x^2 - 17) = 0, \\ x^2 - 7x + 11 > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 9x - x^2 - 17 = 1, \\ x^2 - 7x + 11 > 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} (3-x)(x-6) = 0, \\ x^2 - 7x + 11 > 0 \end{cases} \iff x = 6, \end{aligned}$$

так как $3^2 - 7 \cdot 3 + 11 = -1 < 0$, $6^2 - 7 \cdot 6 + 11 = 5 > 0$.

Ответ: $\{5; 6\}$.

Задача 16. Решите уравнение

$$x^{2 \log_4 x} = \frac{8}{x^2}. \quad (25)$$

Решение. Так как

$$2 \log_4 x = 2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 x = \log_2 x \quad \forall x \in (0; +\infty),$$

то уравнение (25) равносильно уравнению

$$x^{\log_2 x} = \frac{8}{x^2}.$$

Логарифмированием по основанию 2 получаем:

$$\log_2^2 x + 2 \log_2 x - 3 = 0 \iff (\log_2 x + 3)(\log_2 x - 1) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \log_2 x = -3, \\ \log_2 x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{8}, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{8}, 2\right\}$.

Задача 17. Какое из чисел менее всего отличается от корня уравнения

$$\left(\frac{x}{50}\right)^{\log_{0,4} x} = 20: \quad (26)$$

1) 12; 2) 6; 3) 3; 4) 24 ?

Решение. Логарифмируя обе части уравнения (26) по основанию 2, получаем:

$$\log_{0,4} x \cdot \log_2 \frac{x}{50} = \log_2 20 \iff$$

$$\iff \frac{\log_2 x}{\log_2 0,4} \cdot (\log_2 x - \log_2 50) = \log_2 4 + \log_2 5 \iff$$

$$\iff \frac{\log_2 x}{\log_2 2 - \log_2 5} \cdot (\log_2 x - \log_2 2 - \log_2 5^2) = 2 + \log_2 5 \iff$$

$$\iff \frac{\log_2 x}{1 - \log_2 5} \cdot (\log_2 x - 1 - 2 \log_2 5) = 2 + \log_2 5 \iff$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \cdot (\log_2 x - 1 - 2 \log_2 5) = (2 + \log_2 5)(1 - \log_2 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - (2 \log_2 5 + 1) \log_2 x = 2 - \log_2 5 - \log_2^2 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - (2 \log_2 5 + 1) \log_2 x + \log_2^2 5 + \log_2 5 - 2 = 0.$$

Пусть $z = \log_2 x$. Тогда получаем квадратное уравнение

$$z^2 - (2 \log_2 5 + 1)z + \log_2^2 5 + \log_2 5 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z - (\log_2 5 - 1))(z - (\log_2 5 + 2)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \log_2 5 - 1, \\ z = \log_2 5 + 2. \end{cases}$$

Значит, уравнение (26) равносильно совокупности двух уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x = \log_2 5 - 1, \\ \log_2 x = \log_2 5 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \log_2 5 - \log_2 2, \\ \log_2 x = \log_2 5 + \log_2 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \log_2 2,5, \\ \log_2 x = \log_2 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2,5, \\ x = 20. \end{cases}$$

Из чисел 12, 6, 3 и 24 менее всего отличается от корня уравнения (26) число 3.

Ответ: 3).

Задача 18. При некотором значении (или при некоторых значениях) параметра a уравнение

$$\log_2 x^2 \cdot \log_2 a - \log_2^2 x = y^2 + 4y\sqrt{a} + 20 \quad (27)$$

имеет единственное решение (x_0, y_0) . Выберите интервал, содержащий хотя бы одно значение отношения $\frac{x_0}{y_0}$:

1) $(-3,5; -1,5)$; 2) $(1,5; 3,5)$; 3) $(-1,5; -0,5)$; 4) $(0,5; 1,5)$.

Решение. Уравнение (27) равносильно уравнению

$$2 \log_2 x \cdot \log_2 a - \log_2^2 x = y^2 + 4y\sqrt{a} + 20 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow -(\log_2^2 x - 2 \log_2 x \cdot \log_2 a + \log_2^2 a) + \log_2^2 a = y^2 + 4y\sqrt{a} + 20 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -(\log_2 x - \log_2 a)^2 + \log_2^2 a = y^2 + 4y\sqrt{a} + 4a + 20 - 4a \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -\log_2^2 \frac{x}{a} + \log_2^2 a = (y + 2\sqrt{a})^2 + 20 - 4a \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \log_2^2 \frac{x}{a} + (y + 2\sqrt{a})^2 = \log_2^2 a + 4a - 20. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Если $\log_2^2 a + 4a - 20 < 0$, то у уравнения (28) нет решений.

Если $\log_2^2 a + 4a - 20 > 0$, то уравнение (28) имеет более одного решения.

Единственное решение уравнение (28) имеет при равенстве его правой части нулю:

$$\log_2^2 a + 4a - 20 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 a = 20 - 4a. \quad (29)$$

Этим решением будет пара чисел $(a, -2\sqrt{a})$, где a — корень уравнения (29).

Заметим, что $a = 4$ — корень уравнения (29). При этом частное

$$\frac{a}{-2\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{a}}{2} = -1 \in (-1,5; 0,5).$$

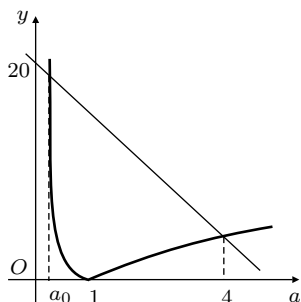


Рис. 1

Графически убеждаемся (рис. 1), что уравнение (29) имеет ещё один корень $a = a_0$, лежащий на числовой оси между нулём и единицей. При этом имеет место неравенство

$$-\frac{1}{2} < -\frac{\sqrt{a_0}}{2} < 0 \quad \forall a_0 \in (0; 1).$$

Ни один из предлагаемых в условии задачи промежутков 1) — 4) не содержит чисел из интервала $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Ответ: 3).

Задача 19. Выберите такое множество значений параметра a , для каждого из которых существуют два различных корня уравнения

$$x = a \cdot \log_a(a^2 + 2ax - 2|x^2 - 5ax + 4a^2|) - 2a: \quad (30)$$

1) $\{0,5; 0,8; 1,8; 2; 2,5\};$	2) $\{0,1; 0,49; 1,67; 2,4; 2,8\};$
3) $\{0,1; 1,3; 1,8; 2,3; 3,2\};$	4) $\{0,9; 1,6; 2; 2,5; 2,9\}.$

Решение. Уравнение (30) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \log_a(a^2 + 2ax - 2|x^2 - 5ax + 4a^2|) - 2 \iff \\ \iff \frac{x}{a} &= \log_a(a^2 + 2ax - 2|x^2 - 5ax + 4a^2|) - \log_a a^2 \iff \\ \iff \frac{x}{a} &= \log_a \frac{a^2 + 2ax - 2|x^2 - 5ax + 4a^2|}{a^2} \iff \\ \iff \frac{x}{a} &= \log_a \left(1 + 2 \frac{x}{a} - 2 \left| \frac{x^2}{a^2} - 5 \frac{x}{a} + 4 \right| \right). \end{aligned}$$

При $t = \frac{x}{a}$ полученное уравнение будет иметь вид

$$t = \log_a(1 + 2t - 2|t^2 - 5t + 4|) \iff a^t = 1 + 2t - 2|t^2 - 5t + 4|.$$

Неравенства

$$t^2 - 5t + 4 \leq 0 \iff (t-1)(t-4) \leq 0 \iff 1 \leq t \leq 4;$$

$$t^2 - 5t + 4 > 0 \iff (t-1)(t-4) > 0 \iff \begin{cases} t < 1, \\ t > 4. \end{cases}$$

Значит, выражение

$$1 + 2t - 2|t^2 - 5t + 4| = \begin{cases} -2t^2 + 12t - 7 & \forall t \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty), \\ 2t^2 - 8t + 9 & \forall t \in [1; 4]. \end{cases}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$f(t) = \begin{cases} -2t^2 + 12t - 7 & \forall t \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty), \\ 2t^2 - 8t + 9 & \forall t \in [1; 4]. \end{cases}$$

Её график Γf изображён на рисунке 2. На нём также изображены графики Γg и Γh соответственно функций $g(t) = 3^t$ и $h(t) = (\sqrt{3})^t$.

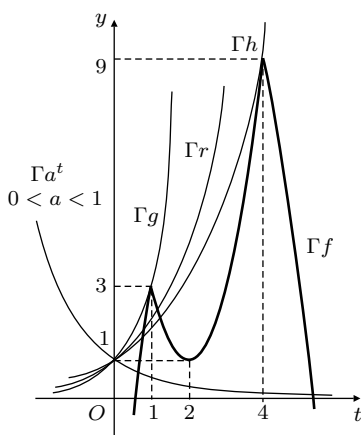


Рис. 2

График Γr показательной функции $r(t) = a^t$ при $\sqrt{3} < a < 3$ будет иметь с графиком функции f две точки пересечения (рис. 2).

При $1 < a \leq \sqrt{3}$ график Γr пересекает график Γf не менее чем в трёх точках. А при $a \geq 3$ — не более чем в одной точке.

Стало быть, при $\sqrt{3} < a < 3$ уравнение (30) имеет два различных корня.

Если $0 < a < 1$, то график показательной функции a^t имеет две общие точки с графиком функции f (рис. 2). Значит, при $0 < a < 1$ уравнение (30) также имеет два различных корня.

Итак, уравнение (30) имеет два различных корня тогда и только тогда, когда параметр a принимает

значения из множества $V = (0; 1) \cup (\sqrt{3}; 3)$.

Только числа из набора 1) принадлежат множеству V .

Ответ: 1).

Глава 2

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Показательные неравенства

1. Неравенство $a^{f(x)} > b$

Неравенство

$$a^{f(x)} > b \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (1)$$

имеет смысл на области определения функции f . При этом

$$a^{f(x)} > 0 \quad \forall x \in D(f).$$

Если $b \leq 0$, то решениями неравенства (1) будут все x из области определения функции f .

При $b > 0$ укажем следующие способы решения неравенства (1).

Способ 1. Если учесть возрастание натурального логарифма $y(x) = \ln x \quad \forall x \in (0; +\infty)$, то неравенство

$$a^{f(x)} > b \iff \ln a^{f(x)} > \ln b \iff f(x) \ln a > \ln b. \quad (2)$$

Аналогично, основываясь на возрастании десятичного логарифма $y(x) = \lg x \quad \forall x \in (0; +\infty)$, получаем:

$$a^{f(x)} > b \iff \lg a^{f(x)} > \lg b \iff f(x) \lg a > \lg b. \quad (3)$$

Способ 2 основан на том, что логарифмическая функция $y(x) = \log_a x \quad \forall x \in (0; +\infty)$ при $0 < a < 1$ убывает, а при $a > 1$ возрастает.

Тогда, если $0 < a < 1$, то

$$a^{f(x)} > b \iff \log_a a^{f(x)} < \log_a b \iff f(x) < \log_a b,$$

а если $a > 1$, то

$$a^{f(x)} > b \iff \log_a a^{f(x)} > \log_a b \iff f(x) > \log_a b.$$

Итак, неравенство (1) можно решать и на основании равносильности

$$a^{f(x)} > b \iff \begin{cases} \forall x \in D(f) \text{ при } b \leq 0, a > 0, a \neq 1, \\ f(x) < \log_a b \text{ при } b > 0, 0 < a < 1, \\ f(x) > \log_a b \text{ при } b > 0, a > 1. \end{cases} \quad (4)$$

Пример 1. Неравенство

$$3^{3x-1} > 9$$

решим, основываясь на том, что, если основание $a > 1$, то показательная функция $y(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ возрастает:

$$3^{3x-1} > 9 \iff 3^{3x-1} > 3^2 \iff 3x-1 > 2 \iff x > 1.$$

Пример 2. Так как показательная функция $y(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ с основанием $0 < a < 1$ убывает, то неравенство:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > 125 &\iff \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \iff \frac{2x+1}{1-x} < -3 \iff \\ &\iff \frac{2x+1}{x-1} - 3 > 0 \iff \frac{2x+1-3x+3}{x-1} > 0 \iff \\ &\iff \frac{4-x}{x-1} > 0 \iff (x-1)(x-4) < 0 \iff 1 < x < 4. \end{aligned}$$

Пример 3. На основании формулы (4) почленным логарифмированием по основанию 5 решаем показательное неравенство:

$$\begin{aligned} 5^{8-4x} > 81 &\iff 8-4x > \log_5 81 \iff 4x < 8 - \log_5 3^4 \iff \\ &\iff 4x < 8 - 4\log_5 3 \iff x < 2 - \log_5 3. \end{aligned}$$

Задача 1. Решите неравенство

$$12^{5-x} > 3^{x-5}.$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\begin{aligned} 12^{5-x} > \frac{1}{3^{5-x}} &\iff 12^{5-x} \cdot 3^{5-x} > 1 \iff \\ &\iff (12 \cdot 3)^{5-x} > 1 \iff 5 - x > 0 \iff x < 5. \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; 5)$.

Задача 2. Решите неравенство

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}.$$

Решение. Неравенство представим в виде

$$\begin{aligned} 2^{(x+1)+1} - 2^{(x+1)+2} - 2^{(x+1)+3} &> 5^{x+1} - 5^{(x+1)+1} \iff \\ \iff 2^{x+1}(2 - 2^2 - 2^3) &> 5^{x+1}(1 - 5) \iff -10 \cdot 2^{x+1} > -4 \cdot 5^{x+1} \iff \\ \iff 5 \cdot 2^{x+1} < 2 \cdot 5^{x+1} &\iff \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} < \frac{2}{5} \iff x+1 > 1 \iff x > 0. \end{aligned}$$

Ответ: $(0; +\infty)$.

Задача 3. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|x+2|}{2-|x|}} > 9. \quad (5)$$

Решение. Неравенство представим в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|x+2|}{2-|x|}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} &\iff \frac{|x+2|}{2-|x|} < -2 \iff \frac{|x+2|}{2-|x|} + 2 < 0 \iff \\ &\iff \frac{|x+2| + 2(2-|x|)}{2-|x|} < 0. \end{aligned}$$

Если $2 - |x| > 0$, то $|x + 2| + 2(2 - |x|) > 0$, а значит,

$$\frac{|x + 2| + 2(2 - |x|)}{2 - |x|} > 0.$$

Следовательно, неравенство (5) равносильно системе неравенств

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2 - |x| < 0, \\ |x + 2| + 2(2 - |x|) > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} |x| > 2, \\ |x + 2| + 2(2 - |x|) > 0 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} \begin{cases} x < -2, \\ x > 2, \\ |x + 2| + 2(2 - |x|) > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \begin{cases} x < -2, \\ -(x + 2) + 2(2 + x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ x + 2 + 2(2 - x) > 0 \end{cases} \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} \begin{cases} x < -2, \\ x + 2 > 0, \\ x > 2, \\ -x + 6 > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x > 2, \\ x < 6 \end{cases} \iff 2 < x < 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(2; 6)$.

Задача 4. Решите неравенство

$$2^{1 - 2^{\frac{1}{x}}} < 0,125.$$

Решение. Неравенство представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{2}{2^{2^{\frac{1}{x}}}} < 0,125 &\iff 2^{2^{\frac{1}{x}}} > \frac{2}{0,125} \iff 2^{2^{\frac{1}{x}}} > 2^4 \iff 2^{\frac{1}{x}} > 4 \iff \\ &\iff 2^{\frac{1}{x}} > 2^2 \iff \frac{1}{x} > 2 \iff \frac{1 - 2x}{x} > 0 \iff 0 < x < 0,5. \end{aligned}$$

Ответ: $(0; 0,5)$.

2. Неравенство $a^{f(x)} < b$

Неравенство

$$a^{f(x)} < b \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (1)$$

имеет смысл на области определения функции f . Степень

$$a^{f(x)} > 0 \quad \forall x \in D(f).$$

Если $b \leq 0$, то у неравенства (1) нет решений.

При $b > 0$ подобно тому, как сделано в пункте 1, осуществим следующие равносильностные переходы при почленном логарифмировании неравенства (1):

по основанию e

$$a^{f(x)} < b \iff \ln a^{f(x)} < \ln b \iff f(x) \ln a < \ln b; \quad (2)$$

по основанию 10

$$a^{f(x)} < b \iff \lg a^{f(x)} < \lg b \iff f(x) \lg a < \lg b; \quad (3)$$

по основанию a , когда $0 < a < 1$,

$$a^{f(x)} < b \iff \log_a a^{f(x)} > \log_a b \iff f(x) > \log_a b;$$

по основанию $a > 1$

$$a^{f(x)} < b \iff \log_a a^{f(x)} < \log_a b \iff f(x) < \log_a b.$$

Итак, неравенство (1) можно решать на основании равносильностных переходов (2) и (3), а также равносильности

$a^{f(x)} < b \iff$	$\begin{cases} \emptyset & \text{при } b \leq 0, a > 0, a \neq 1, \\ f(x) > \log_a b & \text{при } b > 0, 0 < a < 1, \\ f(x) < \log_a b & \text{при } b > 0, a > 1. \end{cases}$	(4)
---------------------	--	-----

Пример 1. На основании формулы (4) почленным логарифмированием по основанию 4 решаем неравенство:

$$\begin{aligned} 4^{5x-9} < 9 &\iff 5x - 9 < \log_4 9 \iff 5x < 9 + \log_{2^2} 3^2 \iff \\ &\iff 5x < 9 + \log_2 3 \iff x < 1,8 + 0,2 \log_2 3. \end{aligned}$$

Пример 2. Основываясь на том, что при $0 < a < 1$ показательная функция $y(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ убывает, решаем неравенства:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} < \frac{1}{16} &\iff \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} < \left(\frac{1}{4}\right)^2 \iff x - 3 > 2 \iff x > 5; \\ 0,3^{2x^2-3x+6} < 0,00243 &\iff 0,3^{2x^2-3x+6} < 0,3^5 \iff \\ &\iff 2x^2 - 3x + 6 > 5 \iff 2x^2 - 3x + 1 > 0 \iff \\ &\iff (2x - 1)(x - 1) > 0 \iff \begin{cases} x < 0,5, \\ x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Пример 3. Так как показательная функция $y(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ с основанием $a > 1$ возрастает, то неравенство

$$4^{2x-8} < \frac{1}{64} \iff 4^{2x-8} < 4^{-3} \iff 2x - 8 < -3 \iff x < 2,5.$$

3. Неравенства $a^{f(x)} \geq b$ и $a^{f(x)} \leq b$

Нестрогое неравенство

$$a^{f(x)} \geq b \quad (a > 0, a \neq 1) \tag{1}$$

решается аналогично, как и строгое неравенство (1.1), почленным логарифмированием:

по основанию e

$$a^{f(x)} \geq b \iff \ln a^{f(x)} \geq \ln b \iff f(x) \ln a \geq \ln b; \tag{2}$$

по основанию 10

$$a^{f(x)} \geq b \iff \lg a^{f(x)} \geq \lg b \iff f(x) \lg a \geq \lg b. \quad (3)$$

Наряду с равносильностными переходами (2) и (3), неравенство (1) решается с помощью равносильности

$$a^{f(x)} \geq b \iff \begin{cases} \forall x \in D(f) \text{ при } b \leq 0, a > 0, a \neq 1, \\ f(x) \leq \log_a b \text{ при } b > 0, 0 < a < 1, \\ f(x) \geq \log_a b \text{ при } b > 0, a > 1. \end{cases} \quad (4)$$

Пример 1. Исходя из того, что при $a > 1$ показательная функция $y(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ возрастает, решаем неравенство:

$$\begin{aligned} (2^{x+3})^{\frac{1}{x-3}} &\geq \frac{1}{2^4} \iff 2^{\frac{x+3}{x-3}} \geq 2^{-4} \iff \frac{x+3}{x-3} \geq -4 \iff \\ &\iff \frac{x+3}{x-3} + 4 \geq 0 \iff \frac{5x-9}{x-3} \geq 0 \iff \begin{cases} x \leq 1,8, \\ x > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Пример 2. Основываясь на том, что при $0 < a < 1$ показательная функция $y(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ убывает, решим неравенство:

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{3}{7} \right)^{\frac{1}{x^2}} \right)^{x^2-2x} &\geq 1 \iff \left(\frac{3}{7} \right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \geq 1 \iff \frac{x^2-2x}{x^2} \leq 0 \iff \\ &\iff \frac{x(x-2)}{x^2} \leq 0 \iff \frac{x-2}{x} \leq 0 \iff 0 < x \leq 2. \end{aligned}$$

Нестрогое неравенство

$$a^{f(x)} \leq b \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (5)$$

решается аналогично, как и строгое неравенство (1.2), почленным логарифмированием:

по основанию e

$$a^{f(x)} \leq b \iff \ln a^{f(x)} \leq \ln b \iff f(x) \ln a \leq \ln b; \quad (6)$$

по основанию 10

$$a^{f(x)} \leq b \iff \lg a^{f(x)} \leq \lg b \iff f(x) \lg a \leq \lg b; \quad (7)$$

а также, с помощью равносильности

$$a^{f(x)} \leq b \iff \begin{cases} \emptyset & \text{при } b \leq 0, a > 0, a \neq 1, \\ f(x) \geq \log_a b & \text{при } b > 0, 0 < a < 1, \\ f(x) \leq \log_a b & \text{при } b > 0, a > 1. \end{cases} \quad (8)$$

Задача 1. Решите неравенство

$$5^{\sin \pi x} + 5^{1-\sin \pi x} \geq 6. \quad (9)$$

Решение. Пусть

$$5^{\sin \pi x} = t \quad (t > 0). \quad (10)$$

Тогда $5^{-\sin \pi x} = \frac{1}{t}$. Получаем систему

$$\begin{cases} t + 5\frac{1}{t} \geq 6, \\ t > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{(t-1)(t-5)}{t} \geq 0, \\ t > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < t \leq 1, \\ t \geq 5. \end{cases}$$

С учётом замены (10) неравенство (9) равносильно совокупности неравенств

$$\begin{cases} 5^{\sin \pi x} \leq 1, \\ 5^{\sin \pi x} \geq 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin \pi x \leq 0, \\ \sin \pi x \geq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin \pi x \leq 0, \\ \sin \pi x = 1 \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\pi + 2\pi k \leq \pi x \leq 2\pi k, \\ \pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2k - 1 \leq x \leq 2k, \\ x = 0,5 + 2k \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $[2k - 1; 2k] \cup \{0,5 + 2k\} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

4. Неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$

Решение неравенств указанных видов основано на монотонности показательной функции $y(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, которая при $0 < a < 1$ убывает, а при $a > 1$ возрастает.

Если $0 < a < 1$, то

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x) < g(x).$$

Если $a > 1$, то

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x) > g(x).$$

Следовательно, строгое неравенство

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \text{ при } 0 < a < 1, \\ f(x) > g(x) \text{ при } a > 1, \end{cases} \quad (1)$$

а

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \text{ при } 0 < a < 1, \\ f(x) < g(x) \text{ при } a > 1. \end{cases} \quad (2)$$

Аналогично устанавливаем следующие равносильности решения нестрогого неравенства:

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ при } 0 < a < 1, \\ f(x) \geq g(x) \text{ при } a > 1, \end{cases} \quad (3)$$

а

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x) & \text{при } 0 < a < 1, \\ f(x) \leq g(x) & \text{при } a > 1. \end{cases} \quad (4)$$

Пример 1. По формуле (2), основываясь на том, что показательная функция $y(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ с основанием $a > 1$ возрастает, решаем неравенство:

$$\begin{aligned} 3^{x^2} < (\sqrt{3})^{6-x} &\iff 3^{x^2} < 3^{\frac{6-x}{2}} \iff x^2 < \frac{6-x}{2} \iff \\ &\iff 2x^2 + x - 6 < 0 \iff (x+2)(2x-3) < 0 \iff -2 < x < 1,5 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 3^{x^2} < (\sqrt{3})^{6-x} &\iff (\sqrt{3})^{2x^2} < (\sqrt{3})^{6-x} \iff 2x^2 < 6-x \iff \\ &\iff 2x^2 + x - 6 < 0 \iff (x+2)(2x-3) < 0 \iff -2 < x < 1,5. \end{aligned}$$

Пример 2. Решим неравенство

$$(0,25)^{x^2} > 4^{6-x}.$$

По формуле (1), учитывая возрастание показательной функции $y(x) = a^x$, $D(y) = \mathbb{R}$, с основанием $a > 1$, получаем, что

$$\begin{aligned} (0,25)^{x^2} > 4^{6-x} &\iff 4^{-x^2} > 4^{6-x} \iff \\ &\iff -x^2 > 6-x \iff x^2 - x + 6 < 0, \end{aligned}$$

или (с учётом убывания функции y при $0 < a < 1$)

$$\begin{aligned} (0,25)^{x^2} > 4^{6-x} &\iff (0,25)^{x^2} > (0,25)^{x-6} \iff \\ &\iff x^2 < x - 6 \iff x^2 - x + 6 < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, данное неравенство не имеет решений, так как квадратный трёхчлен $x^2 - x + 6 > 0$ при любом действительном x , как имеющий отрицательный дискриминант $D = 1 - 24 = -23$ и положительный коэффициент 1 при x^2 .

Пример 3. По формуле (3), учитывая возрастание показательной функции $y(x) = a^x$, $D(y) = \mathbb{R}$, с основанием $a > 1$, получаем, что неравенство

$$(1,3)^{|x|} \geq (1,3)^x \iff |x| \geq x,$$

и выполняется при любом x , так как модуль любого действительного числа больше или равен этому числу.

Пример 4. По формуле (4), учитывая убывание показательной функции $y(x) = a^x$, $D(y) = \mathbb{R}$, при $0 < a < 1$, решаем неравенство:

$$\begin{aligned} (0,3)^{\sqrt{x}} \geq (0,3)^x &\iff \sqrt{x} \leq x \iff 0 \leq x \leq x^2 \iff \\ &\iff \begin{cases} x \geq 0, \\ x(x-1) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ \begin{cases} x > 0, \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Задача 1. Решите неравенство

$$16^{\frac{1}{8x}} - \sqrt[5]{0,5^{x-\frac{7}{2}}} \cdot 4^{\frac{1}{x}} < 0.$$

Решение. Преобразовывая левую часть данного неравенства

$$16^{\frac{1}{8x}} - \sqrt[5]{0,5^{x-\frac{7}{2}}} \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{2x}} - 2^{-\frac{2x-7}{10}} \cdot 2^{\frac{2}{x}} = 2^{\frac{1}{2x}} - 2^{\frac{2}{x} - \frac{2x-7}{10}},$$

приводим его к виду

$$2^{\frac{1}{2x}} - 2^{\frac{2}{x} - \frac{2x-7}{10}} < 0 \iff$$

$$\iff 2^{\frac{1}{2x}} < 2^{\frac{2}{x} - \frac{2x-7}{10}} \iff$$

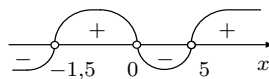


Рис. 1

$$\iff \frac{1}{2x} < \frac{2}{x} - \frac{2x-7}{10} \iff \frac{2x^2 - 7x - 15}{10x} < 0 \iff$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x(2x^2 - 7x - 15) < 0 &\Leftrightarrow x(2x + 3)(x - 5) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1,5, \\ 0 < x < 5, \end{cases} \end{aligned}$$

что устанавливаем методом числовых промежутков (рис. 1).

Ответ: $(-\infty; -1,5) \cup (0; 5)$.

5. Показательно-степенные неравенства

Показательно-степенные неравенства

$$h^{f(x)}(x) > h^{g(x)}(x), \quad h^{f(x)}(x) < h^{g(x)}(x)$$

и

$$h^{f(x)}(x) \leq h^{g(x)}(x), \quad h^{f(x)}(x) \geq h^{g(x)}(x)$$

имеют смысл, когда $h(x) > 0$, а функции f и g определены.

Основываясь на равносильностях (1.4) – (4.4) и том, что

$$1^{f(x)} = 1 \quad \forall x \in D(f),$$

получаем равносильности решения простейших показатель-
но-степенных неравенств:

$$h^{f(x)}(x) > h^{g(x)}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) < g(x), \\ \emptyset \text{ при } h(x) = 1 \text{ и} \\ x \in D(f) \cap D(g), \\ h(x) > 1, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \quad (1)$$

$$h^{f(x)}(x) < h^{g(x)}(x) \iff \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > g(x), \\ \emptyset \text{ при } h(x) = 1 \text{ и} \\ x \in D(f) \cap D(g), \\ h(x) > 1, \\ f(x) < g(x); \end{cases} \quad (2)$$

$$h^{f(x)}(x) \geq h^{g(x)}(x) \iff \begin{cases} 0 < h(x) \leq 1, \\ f(x) \leq g(x), \\ h(x) \geq 1, \\ f(x) \geq g(x); \end{cases} \quad (3)$$

$$h^{f(x)}(x) \leq h^{g(x)}(x) \iff \begin{cases} 0 < h(x) \leq 1, \\ f(x) \geq g(x), \\ h(x) \geq 1, \\ f(x) \leq g(x). \end{cases} \quad (4)$$

Пример 1. Решим неравенство

$$(x - 2)^{x^2 - 6x + 8} > 1. \quad (5)$$

Так как неравенство строгое, то достаточно рассмотреть два случая:

$$0 < x - 2 < 1 \iff 2 < x < 3; \quad x - 2 > 1 \iff x > 3.$$

Если $0 < x - 2 < 1$, то неравенство (5) равносильно системе

$$\begin{cases} 2 < x < 3, \\ x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 < x < 3, \\ (x - 2)(x - 4) < 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2 < x < 3, \\ 2 < x < 4 \end{cases} \iff 2 < x < 3.$$

Если $x - 2 > 1$, то неравенство (5) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 3, \\ (x - 2)(x - 4) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 3, \\ \begin{cases} x < 2, \\ x > 4 \end{cases} \end{cases} \iff x > 4.$$

Множеством решений неравенства (5) будет $(2; 3) \cup (4; +\infty)$.

Задача 1. Решите неравенство

$$(x^2 + x + 1)^3 \leq (x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}}.$$

Решение. Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{aligned} & \left[\begin{cases} 0 < x^2 + x + 1 \leq 1, \\ 3 \geq \frac{x+5}{x+2}, \\ \begin{cases} x^2 + x + 1 \geq 1, \\ 3 \leq \frac{x+5}{x+2} \end{cases} \end{cases} \right] \iff \left[\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0, \\ x^2 + x + 1 \leq 1, \\ \frac{x+5}{x+2} - 3 \leq 0, \\ \begin{cases} (x+1)x \geq 0, \\ \frac{x+5}{x+2} - 3 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \right] \iff \\ & \iff \left[\begin{cases} \begin{cases} (x+0,5)^2 + 0,75 > 0, \\ (x+1)x \leq 0, \\ \frac{-(2x+1)}{x+2} \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} (x+1)x \geq 0, \\ \frac{-(2x+1)}{x+2} \geq 0 \end{cases} \end{cases} \right] \iff \left[\begin{cases} \begin{cases} (x+1)x \leq 0, \\ \frac{2x+1}{x+2} \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} (x+1)x \geq 0, \\ \frac{2x+1}{x+2} \leq 0 \end{cases} \end{cases} \right] \iff \\ & \iff \left[\begin{cases} -0,5 \leq x \leq 0, \\ -2 < x \leq -1. \end{cases} \right] \end{aligned}$$

Ответ: $(-2; -1] \cup [-0,5; 0]$.

6. Задачи

Задача 1. Решите неравенство

$$4 \cdot 3^{4x-2} - 9 \cdot 2^{4x-2} < 5 \cdot 6^{2x-1}. \quad (1)$$

Решение. Делением левой и правой частей неравенства (1) на 6^{2x-1} с предварительным учётом того, что

$$3^{4x-2} = 3^{2(2x-1)} = 9^{2x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

а $6^{2x-1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, преобразуем неравенство (1):

$$4 \cdot 9^{2x-1} - 9 \cdot 4^{2x-1} < 5 \cdot 6^{2x-1} \iff 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1} - 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} < 5.$$

Пусть¹

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1} = t \quad (t > 0). \quad (2)$$

Тогда $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = \frac{1}{t}$. Получаем систему неравенств

$$\begin{aligned} & \begin{cases} t > 0, \\ 4t - \frac{9}{t} < 5 \end{cases} \iff \begin{cases} t > 0, \\ \frac{4t^2 - 5t - 9}{t} < 0 \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} t > 0, \\ \frac{(t+1)(4t-9)}{t} < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t > 0, \\ 4t - 9 < 0 \end{cases} \iff 0 < t < \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

С учётом подстановки (2) устанавливаем, что неравенство (1) равносильно двойному неравенству

$$0 < \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1} < \left(\frac{3}{2}\right)^2 \iff 2x - 1 < 2 \iff x < 1,5.$$

Ответ: $(-\infty; 1,5)$.

¹ Можно использовать подстановку $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = t \quad (t > 0)$.

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{3^{2|x-1|} + 3}{4} < 3^{|x-1|}.$$

Решение. Неравенство

$$\begin{aligned} \frac{3^{2|x-1|} + 3}{4} < 3^{|x-1|} &\iff \frac{3^{2|x-1|} + 3}{4} - 3^{|x-1|} < 0 \iff \\ \iff 3^{2|x-1|} - 4 \cdot 3^{|x-1|} + 3 < 0 &\iff (3^{|x-1|} - 1)(3^{|x-1|} - 3) < 0 \iff \\ \iff 1 < 3^{|x-1|} < 3 &\iff 0 < |x-1| < 1 \iff \begin{cases} x-1 \neq 0, \\ |x-1| < 1 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} x \neq 1, \\ -1 < x-1 < 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x \neq 1, \\ 0 < x < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 1 < x < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(0; 1) \cup (1; 2)$.**Задача 3. Решите неравенство**

$$9^{\sqrt{x}} \leq 8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x} + 1}.$$

Решение. Неравенство

$$\begin{aligned} 9^{\sqrt{x}} &\leq 8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x} + 1} \iff 8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9 \cdot 3^{2\sqrt[4]{x}} - 3^{2\sqrt{x}} \geq 0 \iff \\ &\iff 8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 2\sqrt[4]{x}} + 9 - 3^{2\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x}} \geq 0 \iff \\ &\iff 3^{2(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x})} - 8 \cdot 3^{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} - 9 \leq 0 \iff \\ &\iff (3^{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} + 1)(3^{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} - 9) \leq 0 \iff \\ &\iff 3^{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} - 9 \leq 0 \iff 3^{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} \leq 3^2 \iff \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} \leq 2 \iff \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow (\sqrt[4]{x})^2 - \sqrt[4]{x} - 2 \leq 0 \Longleftrightarrow (\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt[4]{x} - 2) \leq 0 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \sqrt[4]{x} - 2 \leq 0 \Longleftrightarrow \sqrt[4]{x} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2^4 \Longleftrightarrow 0 \leq x \leq 16. \end{aligned}$$

Ответ: $[0; 16]$.

Задача 4. Решите неравенство

$$\frac{1}{3^x + 5} < \frac{1}{3^{x+1} - 1}. \quad (3)$$

Решение. Поскольку

$$3^x + 5 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

то из неравенства (3) следует, что

$$3^{x+1} - 1 > 0.$$

Поэтому неравенство (3) равносильно системе неравенств

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3^{x+1} - 1 > 0, \\ 3^{x+1} - 1 < 3^x + 5 \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 3^x > 1, \\ 3 \cdot 3^x - 3^x < 6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3^x > 3^{-1}, \\ 3^x < 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; 1)$.

Задача 5. Решите неравенство

$$\left| 3^2 \cdot 4^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{2}{x}+1} - 8^{\frac{2}{x}+\frac{2}{3}} \right| + 9 \cdot 4^{\frac{2}{x}} \leq 4^{1+\frac{3}{x}} + 4^{\frac{1}{2}+\frac{1}{x}}. \quad (4)$$

Решение. При любом $x \neq 0$ подмодульное выражение

$$3^2 \cdot 4^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{2}{x}+1} - 8^{\frac{2}{x}+\frac{2}{3}} = 9 \cdot 2^{\frac{4}{x}} - 2 \cdot 2^{\frac{2}{x}} - 4 \cdot 2^{\frac{6}{x}},$$

сумма

$$4^{1+\frac{3}{x}} + 4^{\frac{1}{2}+\frac{1}{x}} - 9 \cdot 4^{\frac{2}{x}} = 4 \cdot 2^{\frac{6}{x}} + 2 \cdot 2^{\frac{2}{x}} - 9 \cdot 2^{\frac{4}{x}}.$$

Полагая

$$y = 2^{\frac{2}{x}}, \quad f(y) = 4y^3 + 2y - 9y^2,$$

получим неравенство

$$|f(y)| \leq f(y). \quad (5)$$

Модуль $|f(y)| \geq 0$ при любом y из области определения функции f . Тогда из неравенства (5) следует, что $f(y) \geq 0$.

Если $f(y) \geq 0$, то модуль $|f(y)| = f(y)$, и неравенство (5) примет вид $f(y) \leq f(y)$, что верно при любом y из области определения функции f .

Поэтому

$$\begin{aligned} |f(y)| \leq f(y) &\iff \begin{cases} f(y) \geq 0, \\ |f(y)| \leq f(y) \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} f(y) \geq 0, \\ f(y) \leq f(y) \end{cases} \iff f(y) \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, подстановкой $2^{\frac{2}{x}} = y > 0$ неравенство (4) приводим к системе неравенств

$$\begin{aligned} \begin{cases} y > 0, \\ 4y^3 - 9y^2 + 2y \geq 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y > 0, \\ 4y^2 - 9y + 2 \geq 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} y > 0, \\ (4y - 1)(y - 2) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < y \leq 0,25, \\ y \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Стало быть, неравенство (4) равносильно совокупности двух неравенств

$$0 < 2^{\frac{2}{x}} \leq 0,25 \iff 2^{\frac{2}{x}} \leq 2^{-2} \iff \frac{2}{x} \leq -2 \iff$$

$$\iff \frac{1}{x} + 1 \leq 0 \iff \frac{x+1}{x} \leq 0 \iff -1 \leq x < 0$$

и

$$2^{\frac{2}{x}} \geq 2 \iff \frac{2}{x} \geq 1 \iff \frac{2-x}{x} \geq 0 \iff 0 < x \leq 2.$$

Итак, множеством решений неравенства (4) будет $[-1; 0) \cup (0; 2]$.

Ответ: $[-1; 0) \cup (0; 2]$.

Задача 6. Решите неравенство

$$\sqrt{9^x + 2 \cdot 3^x - 3} > 2 - 3^x. \quad (6)$$

Решение. Неравенство (6) равносильно неравенству

$$\sqrt{3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3} > 2 - 3^x \iff \begin{cases} 2 - 3^x < 0, \\ 3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2 - 3^x \geq 0, \\ 3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 > (2 - 3^x)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3^x > 2, \\ (3^x + 3)(3^x - 1) \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 3^x > 2, \\ 3^x \geq 1, \end{cases} \iff \begin{cases} 3^x \leq 2, \\ 6 \cdot 3^x - 7 > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3^x > 2, \\ \frac{7}{6} < 3^x \leq 2 \end{cases} \iff 3^x > \frac{7}{6} \iff$$

$$\iff x > \log_3 \frac{7}{6} \iff x > \log_3 7 - \log_3 2 - 1.$$

Ответ: $(\log_3 7 - \log_3 2 - 1; +\infty)$.

Задача 7. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x^2-2x-15)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leq 1. \quad (7)$$

Решение. В левой и правой частях неравенства (7) расположены положительные выражения при условии их существования. Это позволяет прологарифмировать неравенство (7) по основанию 2.

Тогда с учётом возрастания логарифмической функции с основанием 2 неравенство (7) приведём к равносильному неравенству

$$\begin{aligned} & -\sqrt{(x^2 - 2x - 15)^3} + (x + 3)^2(x - 5) \log_2 7 \leq 0 \iff \\ & \iff \sqrt{((x + 3)(x - 5))^3} - (x + 3)^2(x - 5) \log_2 7 \geq 0 \iff \\ & \iff (x + 3)(x - 5)(\sqrt{(x + 3)(x - 5)} - (x + 3) \log_2 7) \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Неравенство (8) имеет смысл, когда

$$(x + 3)(x - 5) \geq 0 \iff \begin{cases} x \leq -3, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

При $x = -3$ и при $x = 5$ неравенство (8) выполняется.

На множестве $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$ неравенство (8) равносильно неравенству

$$\sqrt{(x + 3)(x - 5)} - (x + 3) \log_2 7 \geq 0. \quad (9)$$

Если $x < -3$, то выражение в левой части неравенства (9) положительное, а значит, неравенство (9) справедливо при любом $x < -3$.

При $x > 5$ неравенство (9) равносильно неравенству

$$\begin{aligned} & \sqrt{x + 3}(\sqrt{x - 5} - \sqrt{x + 3} \log_2 7) \geq 0 \iff \\ & \iff \sqrt{x - 5} \geq \sqrt{x + 3} \log_2 7 \iff \\ & \iff x - 5 \geq (x + 3) \log_2^2 7 \iff (\log_2^2 7 - 1)x + (5 + 3 \log_2^2 7) \leq 0 \end{aligned}$$

и не выполняется, так как выражение

$$(\log_2^2 7 - 1)x > 0 \quad \forall x \in (5; +\infty),$$

и число $5 + 3 \log_2^2 7$ — положительное.

Итак, $(-\infty; -3] \cup \{5\}$ — множество решений неравенства (7).

Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{5\}$.

Задача 8. Решите неравенство

$$(x-2)^{x^2-6x+8} > 1. \quad (10)$$

Решение. Неравенство (10) имеет смысл при $x-2 > 0$.

Основываясь на свойстве монотонности показательной функции, рассмотрим случаи.

1. Если $0 < x-2 < 1$, то с учётом убывания показательной функции с основанием, меньшим единицы, неравенство (10) приводим к системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 < x-2 < 1, \\ x^2-6x+8 < 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 0 < x-2 < 1, \\ (x-2)(x-4) < 0 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} 0 < x-2 < 1, \\ x-4 < 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2 < x < 3, \\ x < 4 \end{cases} \iff 2 < x < 3. \end{aligned}$$

2. Неравенство (10) — строгое, и при $x-2 = 1$ не выполняется.

3. Если $x-2 > 1$, то с учётом возрастания показательной функции с основанием, большим единицы, неравенство (10) приводим к системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-2 > 1, \\ x^2-6x+8 > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x-2 > 1, \\ (x-2)(x-4) > 0 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} x-2 > 1, \\ x-4 > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x > 3, \\ x > 4 \end{cases} \iff x > 4. \end{aligned}$$

Ответ: $(2; 3) \cup (4; +\infty)$.

Задача 9. Решите неравенство

$$|(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} - (\sin x)^{\cos x}| + (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} < (\sin x)^{\cos x}. \quad (11)$$

Решение. Подстановкой

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x} - (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$$

неравенство (11) приводим к виду

$$|f(x)| < f(x). \quad (12)$$

Неравенство (12) решений не имеет.

Действительно, модуль $|f(x)| \geq 0$ при всех x из области определения функции f . Тогда из неравенства (12) следует, что $f(x) > 0$.

Но если $f(x) > 0$, то модуль $|f(x)| = f(x)$, и неравенство (12) будет иметь вид $f(x) > f(x)$, что не верно при любом x .

Отсутствие решений у неравенства (12) означает, что и неравенство (11) решений не имеет.

Ответ: $\emptyset$.

Задача 10. Решите неравенство

$$(x - a)^{x^2+1} \leq (x - a)^{2x}. \quad (13)$$

Решение. Неравенство (13) равносильно совокупности двух систем

$$\begin{aligned} \left[\begin{cases} 0 < x - a \leq 1, \\ x^2 + 1 \geq 2x, \\ x - a \geq 1, \\ x^2 + 1 \leq 2x \end{cases} \right] &\iff \left[\begin{cases} a < x \leq a + 1, \\ (x - 1)^2 \geq 0, \\ x \geq 1 + a, \\ (x - 1)^2 \leq 0 \end{cases} \right] \iff \\ &\iff \left[\begin{cases} a < x \leq a + 1, \\ x \geq 1 + a, \\ x = 1 \end{cases} \right] \iff \left[\begin{cases} a < x \leq a + 1, \\ a \leq 0, \\ x = 1. \end{cases} \right] \end{aligned}$$

Если параметр $a < 0$, то множеством решений неравенства (13) будет $(a; a + 1] \cup \{1\}$; если $a = 0$, то полуинтервал $(0; 1]$; если $a > 0$, то полуинтервал $(a; a + 1]$.

Ответ: $(a; a + 1] \cup \{1\}$ при $a < 0$; $(a; a + 1]$ при $a \geq 0$.

Задача 11. Решите неравенство

$$6^x + 8^x \leq 100. \quad (14)$$

Решение. Способ 1. Возьмём функцию

$$s(x) = 6^x + 8^x, D(s) = \mathbb{R},$$

с помощью которой неравенство (14) запишем в виде

$$s(x) \leq 100.$$

Функция s возрастает как сумма двух показательных функций с основаниями 6 и 8, большими 1.

При $x = 2$ функция s принимает значение $s(2) = 100$.

Поэтому

$$s(x) \leq 100 \quad \forall x \in (-\infty; 2].$$

Множеством решений неравенства (14) будет $(-\infty; 2]$.

Способ 2. Производная

$$s'(x) = 6^x \cdot \ln 6 + 8^x \cdot \ln 8 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Поэтому функция s возрастает.

Далее решаем как в способе 1.

Ответ: $(-\infty; 2]$.

§ 2. Логарифмические неравенства

1. Простейшие логарифмические неравенства

Простейшие логарифмические неравенства

$$\begin{aligned}\log_a f(x) &> b, \quad \log_a f(x) < b, \\ \log_a f(x) &\geq b, \quad \log_a f(x) \leq b,\end{aligned}\tag{1}$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, имеют смысл, когда $f(x) > 0$.

Логарифмическая функция $y(x) = \log_a x \quad \forall x \in (0; +\infty)$ при $0 < a < 1$ убывает, а при $a > 1$ возрастает.

Поэтому, если $0 < a < 1$, то, например,

$$\log_a f(x) > b \iff 0 < f(x) < a^b,$$

а

$$\log_a f(x) \leq b \iff f(x) \geq a^b.$$

Если $a > 1$, то, например,

$$\log_a f(x) < b \iff 0 < f(x) < a^b,$$

а

$$\log_a f(x) \geq b \iff f(x) \geq a^b.$$

Стало быть, для решения простейших логарифмических неравенств (1) могут быть использованы следующие равносильные переходы, в которых считаем, что параметр $a > 0$ и $a \neq 1$:

$$\log_a f(x) > b \iff \begin{cases} 0 < f(x) < a^b & \text{при } 0 < a < 1, \\ f(x) > a^b & \text{при } a > 1; \end{cases}\tag{2}$$

$$\log_a f(x) < b \iff \begin{cases} f(x) > a^b & \text{при } 0 < a < 1, \\ 0 < f(x) < a^b & \text{при } a > 1; \end{cases} \quad (3)$$

$$\log_a f(x) \geq b \iff \begin{cases} 0 < f(x) \leq a^b & \text{при } 0 < a < 1, \\ f(x) \geq a^b & \text{при } a > 1; \end{cases} \quad (4)$$

$$\log_a f(x) \leq b \iff \begin{cases} f(x) \geq a^b & \text{при } 0 < a < 1, \\ 0 < f(x) \leq a^b & \text{при } a > 1. \end{cases} \quad (5)$$

Пример 1. Неравенство

$$\log_{0,25}(x^3 - 12x) > -2 \iff$$

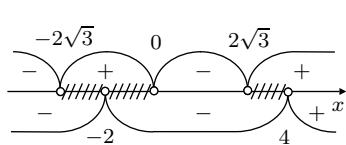


Рис. 1

$$\begin{aligned} &\iff \begin{cases} x^3 - 12x > 0, \\ x^3 - 12x < (0,25)^{-2} \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} x(x^2 - 12) > 0, \\ x^3 - 12x - 16 < 0 \end{cases} \iff \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} (x + 2\sqrt{3})x(x - 2\sqrt{3}) > 0, \\ (x + 2)^2(x - 4) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\sqrt{3} < x < -2, \\ -2 < x < 0, \\ 2\sqrt{3} < x < 4, \end{cases}$$

что устанавливаем с помощью числовой прямой, дважды используя метод числовых промежутков — рис. 1.

Пример 2. В соответствии с формулой (4) при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(2 - \frac{x}{2}\right) \geq -1$$

равносильно двойному неравенству

$$0 < 2 - \frac{x}{2} \leq 2 \iff -2 < -\frac{x}{2} \leq 0 \iff 0 \leq x < 4.$$

Пример 3. Неравенство

$$\begin{aligned} & \log_3 \log_{0,2} \log_{32} \frac{x-1}{x+5} > 0 \iff \\ \iff & \log_{0,2} \log_{32} \frac{x-1}{x+5} > 1 \iff 0 < \log_{32} \frac{x-1}{x+5} < 0,2 \iff \\ \iff & 1 < \frac{x-1}{x+5} < 32^{\frac{1}{5}} \iff 1 < \frac{x-1}{x+5} < 2 \iff \\ \iff & \begin{cases} \frac{x-1}{x+5} > 1, \\ \frac{x-1}{x+5} < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x-1}{x+5} - 1 > 0, \\ \frac{x-1}{x+5} - 2 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{-6}{x+5} > 0, \\ \frac{-x-11}{x+5} < 0 \end{cases} \iff \\ \iff & \begin{cases} x+5 < 0, \\ \frac{x+11}{x+5} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+5 < 0, \\ x+11 < 0 \end{cases} \iff x < -11. \end{aligned}$$

Пример 4. Неравенство

$$\begin{aligned} & \log_3 \log_{\frac{1}{5}} \left(x^2 - \frac{4}{5} \right) < 0 \iff 0 < \log_{\frac{1}{5}} \left(x^2 - \frac{4}{5} \right) < 1 \iff \\ \iff & \frac{1}{5} < x^2 - \frac{4}{5} < 1 \iff 1 < x^2 < \frac{9}{5} \iff 1 < |x| < \frac{3\sqrt{5}}{5} \iff \\ \iff & \begin{cases} -\frac{3\sqrt{5}}{5} < x < -1, \\ 1 < x < \frac{3\sqrt{5}}{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

Пример 5. Неравенство

$$\begin{aligned}\log_3^2 x \leq 9 &\Leftrightarrow |\log_3 x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq \log_3 x \leq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^{-3} \leq x \leq 3^3 \Leftrightarrow \frac{1}{27} \leq x \leq 27.\end{aligned}$$

Пример 6. Неравенство

$$\begin{aligned}\log_2^2 x \geq 9 &\Leftrightarrow |\log_2 x| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq -3, \\ \log_2 x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 2^{-3}, \\ x \geq 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{8}, \\ x \geq 8. \end{cases}\end{aligned}$$

Задача 1. Решите неравенство

$$2\log_2 x - \log_x 16 < 2. \quad (6)$$

Решение. Неравенство (6) равносильно неравенству

$$\begin{aligned}2\log_2 x - 4\log_x 2 < 2 &\Leftrightarrow \log_2 x - \frac{2}{\log_2 x} < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_2^2 x - \log_2 x - 2}{\log_2 x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 2)}{\log_2 x} < 0.\end{aligned}$$

Используя метод числовых промежутков (рис. 2), получаем, что неравенство равносильно совокупности двух неравенств

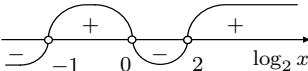


Рис. 2

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \log_2 x < -1, \\ 0 < \log_2 x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 0,5, \\ 1 < x < 4. \end{cases}\end{aligned}$$

Ответ: $(0; 0,5) \cup (1; 4)$.

Задача 2. Решите неравенство

$$5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1.$$

Решение. Показательная $f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ и логарифмическая $g(x) = \log_b x \quad \forall x \in (0; +\infty)$ функции с основаниями a и b , большими единицы, возрастают.

Основываясь на этих свойствах, решаем:

$$\begin{aligned} 5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1 &\iff \log_3 \frac{x-2}{x} < 0 \iff 0 < \frac{x-2}{x} < 1 \iff \\ &\iff \begin{cases} \frac{x-2}{x} > 0, \\ \frac{x-2}{x} < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-2) > 0, \\ \frac{x-2}{x} - 1 < 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} x(x-2) > 0, \\ -\frac{2}{x} < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-2) > 0, \\ x > 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} x > 0, \\ x-2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x > 2 \end{cases} \iff x > 2. \end{aligned}$$

Ответ: $(2; +\infty)$.

Задача 3. Решите неравенство

$$\log_{0,5} x + \log_3 x > 1.$$

Решение. Выразим логарифмы, входящие в задание неравенства, через натуральный логарифм и получим равносильное неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\ln x}{-\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 3} > 1 &\iff \ln 2 \ln x - \ln 3 \ln x > \ln 2 \ln 3 \iff \\ &\iff \ln x < \frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2 - \ln 3} \iff 0 < x < \exp \frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2 - \ln 3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left(0; \exp \frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2 - \ln 3}\right)$.

Задача 4. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 4)} < 1. \quad (7)$$

Решение. Неравенство (7) равносильно неравенству

$$\begin{aligned} 0 \leq \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 4) < 1 &\iff \frac{1}{2} < x^2 + 4x - 4 \leq 1 \iff \\ \iff \begin{cases} 2x^2 + 8x - 9 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 \leq 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x < -\frac{4 + \sqrt{34}}{2}, \\ x > \frac{-4 + \sqrt{34}}{2}, \\ -5 \leq x \leq 1 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} -5 \leq x < -\frac{4 + \sqrt{34}}{2}, \\ \frac{-4 + \sqrt{34}}{2} < x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \left[-5; -\frac{4 + \sqrt{34}}{2}\right) \cup \left(\frac{-4 + \sqrt{34}}{2}; 1\right].$$

Задача 5. Решите неравенство

$$\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. Разделив обе части данного неравенства на $\sqrt{2}$, получим равносильное неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\pi \lg x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\pi \lg x) &\geq \frac{1}{2} \iff \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi \lg x\right) \geq \frac{1}{2} \iff \\ \iff \frac{\pi}{6} + 2\pi k &\leq \frac{\pi}{4} + \pi \lg x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \iff \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{\pi}{12} + 2\pi k \leq \pi \lg x \leq \frac{7\pi}{12} + 2\pi k \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{12} + 2k \leq \lg x \leq \frac{7}{12} + 2k \Longleftrightarrow 10^{\frac{24k-1}{12}} \leq x \leq 10^{\frac{24k+7}{12}}$$

при любом целом k .

$$\text{Ответ: } \left[10^{(24k-1)/12}; 10^{(24k+7)/12} \right] \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

2. Неравенства

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \text{и} \quad \log_a f(x) \geq \log_a g(x)$$

Логарифмическая функция $y(x) = \log_a x \quad \forall x \in (0; +\infty)$
при $0 < a < 1$ убывает, а при $a > 1$ возрастает.

Поэтому, если $0 < a < 1$, то

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Longleftrightarrow 0 < f(x) < g(x).$$

Если $a > 1$, то

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) > g(x) > 0.$$

Следовательно, строгое неравенство

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < g(x) & (0 < a < 1); \\ f(x) > g(x) > 0 & (a > 1). \end{cases} \quad (1)$$

Аналогично устанавливаем следующие равносильности решения неравенств:

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 & (0 < a < 1); \\ 0 < f(x) < g(x) & (a > 1); \end{cases} \quad (2)$$

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) \leq g(x) & (0 < a < 1); \\ f(x) \geq g(x) > 0 & (a > 1); \end{cases} \quad (3)$$

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) > 0 & (0 < a < 1); \\ 0 < f(x) \leq g(x) & (a > 1). \end{cases} \quad (4)$$

Пример 1. Учитывая, что неравенство

$$1 + \log_2(x - 2) > \log_2(x^2 - 3x + 2)$$

определено при

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0, \\ (x - 1)(x - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2,$$

получаем:

$$\begin{aligned} & \log_2(2(x - 2)) > \log_2(x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ 2(x - 2) > x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ 2(x - 2) - (x - 1)(x - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ (x - 2)(3 - x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3. \end{aligned}$$

Задача 1. Решите неравенство

$$(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2 \log_2 x - \log_2(x+6)} \geq 1. \quad (5)$$

Решение. Квадратичный трёхчлен $y^2 - y + 3 > 0$ при любом y , как имеющий отрицательный дискриминант $D = 1 - 12 = -11$ и положительный первый коэффициент 1.

Тогда при любом x показательное выражение

$$2^{2x} - 2^x + 3 > 0 \Leftrightarrow 2^x - 1 + 3 \cdot 2^{-x} > 0 \Leftrightarrow 2^x + 3 \cdot 2^{-x} > 1.$$

Следовательно, неравенство (5) равносильно неравенству

$$\begin{aligned}
 2\log_2 x - \log_2(x+6) \geq 0 &\iff \begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x^2 \geq \log_2(x+6) \end{cases} \iff \\
 &\iff \begin{cases} x > 0, \\ x^2 \geq x+6 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - x - 6 \geq 0 \end{cases} \iff \\
 &\iff \begin{cases} x > 0, \\ (x+2)(x-3) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \iff x \geq 3.
 \end{aligned}$$

Ответ: $[3; +\infty)$.

3. Логарифмические неравенства с неизвестной в основании логарифма

Основываясь на формулах (1.2) – (4.2), получаем равносильностные переходы решения логарифмических неравенств, содержащих неизвестную в основании логарифма:

$$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x) \iff \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x), \\ h(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x) \iff \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > g(x) > 0, \\ h(x) > 1, \\ 0 < f(x) < g(x); \end{cases} \quad (2)$$

$$\log_{h(x)} f(x) \geq \log_{h(x)} g(x) \iff \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ 0 < f(x) \leq g(x), \\ h(x) > 1, \\ f(x) \geq g(x) > 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$\log_{h(x)} f(x) \leq \log_{h(x)} g(x) \iff \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) \geq g(x) > 0, \\ h(x) > 1, \\ 0 < f(x) \leq g(x). \end{cases} \quad (4)$$

Задача 1. Решите неравенство

$$\log_{3^x-2} 16 < 4. \quad (5)$$

Решение. Преобразуем неравенство (5):

$$\log_{3^x-2} 16 < 4 \iff 4 \log_{3^x-2} 2 < 4 \iff \log_{3^x-2} 2 < 1.$$

Тогда в зависимости от основания $3^x - 2$ неравенство (5) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 0 < 3^x - 2 < 1, \\ 3^x - 2 < 2 \end{cases} \iff 0 < 3^x - 2 < 1 \iff 2 < 3^x < 3 \iff \log_3 2 < x < 1;$$

$$\begin{cases} 3^x - 2 > 1, \\ 3^x - 2 > 2 \end{cases} \iff 3^x - 2 > 2 \iff 3^x > 2^2 \iff x > 2 \log_3 2.$$

Ответ: $(\log_3 2; 1) \cup (2 \log_3 2; +\infty)$.

Задача 2. Решите неравенство

$$\log_{x^2} (3 - 2x) \geq 1. \quad (6)$$

Решение. Неравенство (6) равносильно совокупности двух систем. Первая система не имеет решений:

$$\begin{cases} 0 < x^2 < 1, \\ 0 < 3 - 2x \leq x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < |x| < 1, \\ 3 - 2x > 0, \\ 3 - 2x \leq x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 < x < 1, \\ x \neq 0, \\ x < 1,5, \\ (x+3)(x-1) \geq 0. \end{cases}$$

Вторая система

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 > 1, \\ 3 - 2x \geq x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| > 1, \\ x^2 + 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \iff \\ \iff &\begin{cases} \begin{cases} x < -1, \\ x > 1, \end{cases} \\ (x+3)(x-1) \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} x < -1, \\ x+3 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ x-1 \leq 0 \end{cases} \end{cases} \iff -3 \leq x < -1. \end{aligned}$$

Множеством решений неравенства (6) будет $[-3; -1)$.

Ответ: $[-3; -1)$.

Задача 3. Решите неравенство

$$\log_x(x+1) \leq \log_{\frac{1}{x}}(2-x). \quad (7)$$

Решение. Неравенство (7) равносильно неравенству

$$\log_x(x+1) \leq \log_x \frac{1}{2-x}.$$

Полученное неравенство равносильно совокупности двух систем. Первая система

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x+1 \geq \frac{1}{2-x} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x+1 + \frac{1}{x-2} \geq 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 - x - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x(x - 1) - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

Вторая система

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x > 1, \\ 0 < x + 1 \leq \frac{1}{2 - x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x + 1 + \frac{1}{x - 2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \frac{(x + 1)(x - 2) + 1}{x - 2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \frac{\left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)}{x - 2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \leq x < 2.
\end{aligned}$$

Ответ: $(0; 1) \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 2\right)$.

Задача 4. Решите неравенство

$$\frac{1}{2} \log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{4-x}(-x^2 + 5x - 4) > 3. \quad (8)$$

Решение. Предварительно преобразовав неравенство (8), получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \log_{x-1}(x - 4)^2 + \log_{4-x}((x - 1)(4 - x)) > 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \log_{x-1}(4 - x) + \log_{4-x}(x - 1) + \log_{4-x}(4 - x) > 3 \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \log_{x-1}(4-x) + \frac{1}{\log_{x-1}(4-x)} - 2 > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{\log_{x-1}^2(4-x) - 2\log_{x-1}(4-x) + 1}{\log_{x-1}(4-x)} > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{(\log_{x-1}(4-x) - 1)^2}{\log_{x-1}(4-x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{x-1}(4-x) > 0, \\ \log_{x-1}(4-x) \neq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Полученная система равносильна совокупности двух систем.
Первая система не имеет решений:

$$\begin{cases} 0 < x - 1 < 1, \\ 0 < 4 - x < 1, \\ 4 - x \neq x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ 3 < x < 4, \\ x \neq 2,5. \end{cases}$$

Вторая система

$$\begin{cases} x - 1 > 1, \\ 4 - x > 1, \\ 4 - x \neq x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x < 3, \\ x \neq 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 2,5, \\ 2,5 < x < 3. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2,5) \cup (2,5; 3)$.

Задача 5. Решите неравенство

$$\log_{x^2} \frac{2x}{|x-3|} \leq \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Решение. Поскольку $\frac{2x}{|x-3|} > 0$ при $x > 0$, $x \neq 3$, то неравенство

(9) приведём к более простому виду:

$$\frac{1}{2} \log_x \frac{2x}{|x-3|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_x \left(x \cdot \frac{2}{|x-3|} \right) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_x \frac{2}{|x-3|} \leq 1 \Leftrightarrow \log_x \frac{2}{|x-3|} \leq 0.$$

Таким образом, неравенство (9) имеет смысл при $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 3$ и равносильно совокупности трёх систем.

Две системы не имеют решений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \log_x \frac{2}{3-x} \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \frac{2}{3-x} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 2 \geq 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x \geq 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x < 3, \\ \log_x \frac{2}{3-x} \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3, \\ \frac{2}{3-x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3, \\ 2 \leq 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3, \\ x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Третья система

$$\begin{aligned} \begin{cases} x > 3, \\ \log_x \frac{2}{x-3} \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ \frac{2}{x-3} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ 2 \leq x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5. \end{aligned}$$

Ответ: $[5; +\infty)$.

Задача 6. Решите неравенство

$$\log_{\text{tg } x}^2 3 \leq \log_{\text{tg } x} (3 \text{tg}^2 x). \quad (10)$$

Решение. Способ 1. Неравенство (10) равносильно неравенству

$$\log_{\text{tg } x}^2 3 \leq \log_{\text{tg } x} 3 + \log_{\text{tg } x} \text{tg}^2 x \Leftrightarrow \log_{\text{tg } x}^2 3 - \log_{\text{tg } x} 3 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_{\operatorname{tg} x} 3 + 1)(\log_{\operatorname{tg} x} 3 - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \log_{\operatorname{tg} x} 3 \leq 2.$$

Теперь решение распадается на два случая, когда $0 < \operatorname{tg} x < 1$ и когда $\operatorname{tg} x > 1$.

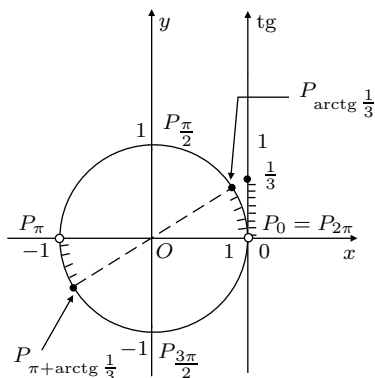


Рис. 1

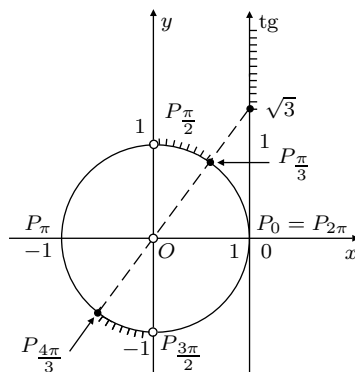


Рис. 2

Система

$$\begin{cases} 0 < \operatorname{tg} x < 1, \\ -1 \leq \log_{\operatorname{tg} x} 3 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \operatorname{tg} x < 1, \\ \log_{\operatorname{tg} x} 3 \geq -1, \\ \log_{\operatorname{tg} x} 3 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \operatorname{tg} x < 1, \\ 3 \leq \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \\ 3 \geq \operatorname{tg}^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \operatorname{tg} x < 1, \\ \operatorname{tg} x \leq \frac{1}{3}, \\ |\operatorname{tg} x| \leq \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \operatorname{tg} x \leq \frac{1}{3}.$$

С помощью единичной окружности (рис. 1) решаем двойное тригонометрическое неравенство

$$0 < \operatorname{tg} x \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \pi n < x \leq \arctg \frac{1}{3} + \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Система

$$\begin{aligned} \begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ -1 \leq \log_{\operatorname{tg} x} 3 \leq 2 \end{cases} &\iff \begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ \log_{\operatorname{tg} x} 3 \geq -1, \\ \log_{\operatorname{tg} x} 3 \leq 2 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ 3 \geq \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \\ 3 \leq \operatorname{tg}^2 x \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ \operatorname{tg} x \geq \frac{1}{3}, \\ |\operatorname{tg}^2 x| \geq \sqrt{3} \end{cases} \iff \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Используя единичную окружность (рис. 2), решаем неравенство

$$\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3} \iff \frac{\pi}{3} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, множество решений неравенства (10) состоит из полуинтервалов $\left(\pi n; \arctg \frac{1}{3} + \pi n\right]$ и $\left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Способ 2. Логарифмы, содержащиеся в неравенстве (10), выразим через логарифмы по основанию 3. В результате получим равносильное неравенство

$$\frac{1}{\log_3^2 \operatorname{tg} x} \leq \frac{1 + 2 \log_3 \operatorname{tg} x}{\log_3 \operatorname{tg} x} \iff \frac{2 \log_3^2 \operatorname{tg} x + \log_3 \operatorname{tg} x - 1}{\log_3^2 \operatorname{tg} x} \geq 0.$$

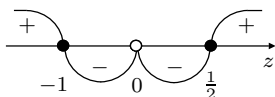


Рис. 3

Полагая $\log_3 \operatorname{tg} x = z$, получаем рациональное неравенство, которое решаем методом числовых промежутков (рис. 3):

$$\frac{2z^2 + z - 1}{z^2} \geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{(z+1)(2z-1)}{z^2} \geq 0 \iff \begin{cases} z \leq -1, \\ z \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Итак, неравенство (10) равносильно совокупности двух неравенств. Первое неравенство

$$\log_3 \operatorname{tg} x \leq -1 \Leftrightarrow 0 < \operatorname{tg} x \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \pi n < x \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

что устанавливаем с помощью единичной окружности, построенной на рисунке 1.

Второе неравенство

$$\log_3 \operatorname{tg} x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

что устанавливаем с помощью единичной окружности, построенной на рисунке 2.

$$\text{Ответ: } \left(\pi n; \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n \right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Задача 7. Решите неравенство

$$\log_{\sin x}^2 2 < \log_{\sin x} (4 \sin^3 x). \quad (11)$$

Решение. Неравенство (11) равносильно неравенству

$$\log_{\sin x}^2 2 - 2 \log_{\sin x} 2 - 3 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_{\sin x} 2 - 3)(\log_{\sin x} 2 + 1) < 0.$$

Поскольку неравенство определено при $0 < \sin x < 1$, то $\log_{\sin x} 2 < 0$, а значит, $\log_{\sin x} 2 - 3 < 0$.

Стало быть, неравенство (11) равносильно неравенству

$$\log_{\sin x} 2 + 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sin x} 2 > \log_{\sin x} (\sin x)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin x < 1, \\ 2 < (\sin x)^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \sin x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

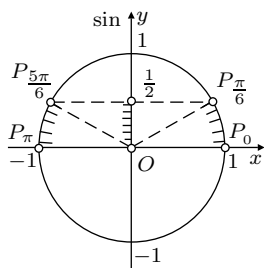


Рис. 4

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

что устанавливаем с помощью единичной окружности (рис. 4).

$$\text{Ответ: } \left(2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

4. Задачи

Задача 1. Решите неравенство

$$x^{\lg \sqrt{x}} > x. \quad (1)$$

Решение. Неравенство (1) имеет смысл при $x > 0$. Поскольку неравенство (1) строгое, то достаточно рассмотреть два¹ случая:

$$1) 0 < x < 1; \quad 2) x > 1.$$

При $0 < x < 1$ неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^{\lg \sqrt{x}} > x \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \lg \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < \sqrt{x} < 10 \end{cases} \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < x < 100 \end{cases} \Longleftrightarrow 0 < x < 1. \end{aligned}$$

При $x > 1$ неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} x > 1, \\ x^{\lg \sqrt{x}} > x \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \lg \sqrt{x} > 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \sqrt{x} > 10 \end{cases} \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x > 100 \end{cases} \Longleftrightarrow x > 100. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } (0; 1) \cup (100; +\infty).$$

¹При $h(x) = 1$ строгое неравенство $h^{f(x)}(x) > h^{g(x)}(x)$ не выполняется.

Задача 2. Решите неравенство

$$5^{\log_3 x} + 3 \cdot x^{\log_3 5} \leq 4 \cdot x^{\log_x 25}. \quad (2)$$

Решение. Используя представление

$$x^{\log_3 5} = \left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_3 5} = 5^{\log_3 x} \quad \forall x > 0,$$

и то, что

$$x^{\log_x 25} = 25 \quad \forall x \in (0; 1) \cup (1; +\infty),$$

неравенство (2) приводим к равносильной системе неравенств

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ 5^{\log_3 x} + 3 \cdot 5^{\log_3 x} \leq 100 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ 5^{\log_3 x} \leq 5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ \log_3 x \leq 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ 0 < x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 1 < x \leq 9. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(0; 1) \cup (1; 9]$.

Задача 3. Решите неравенство

$$\log_5 x + \log_x \frac{x}{3} < \frac{\log_5 x (2 - \log_3 x)}{\log_3 x}. \quad (3)$$

Решение. Неравенство (3) равносильно неравенству

$$\begin{aligned} \log_5 x + \frac{\log_5 x - \log_5 3}{\log_5 x} &< \frac{\log_5 x \left(2 - \frac{\log_5 x}{\log_5 3}\right)}{\frac{\log_5 x}{\log_5 3}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2\log_5^2 x + (1 - 2\log_5 3)\log_5 x - \log_5 3}{\log_5 x} &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(2\log_5 x + 1)(\log_5 x - \log_5 3)}{\log_5 x} &< 0. \end{aligned}$$

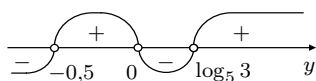


Рис. 1

Методом числовых промежутков (рис. 1, где $y = \log_5 x$) получаем, что неравенство (3) равносильно совокупности двух неравенств

$$\begin{cases} \log_5 x < -0,5, \\ 0 < \log_5 x < \log_5 3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 0 < x < 5^{-0,5}, \\ 1 < x < 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ 1 < x < 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cup (1; 3)$.

Задача 4. Решите неравенство

$$2^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} > 2,5. \quad (4)$$

Решение. Сначала преобразуем выражение, расположенное в левой части неравенства:

$$\begin{aligned} \left(2^{\log_{0,5} x}\right)^{\log_{0,5} x} + x^{\log_{0,5} x} &= \left(2^{-\log_2 x}\right)^{\log_{0,5} x} + x^{\log_{0,5} x} = \\ &= \left(2^{\log_2 x}\right)^{-\log_{0,5} x} + x^{\log_{0,5} x} = x^{-\log_{0,5} x} + x^{\log_{0,5} x} = \\ &= \frac{1}{x^{\log_{0,5} x}} + x^{\log_{0,5} x} \quad \forall x \in (0; +\infty). \end{aligned}$$

Теперь неравенство (4) заменим равносильным неравенством

$$\frac{1}{x^{\log_{0,5} x}} + x^{\log_{0,5} x} > 2,5,$$

которое подстановкой

$$x^{\log_{0,5} x} = t \quad (t > 0)$$

приводим к системе неравенств

$$\begin{aligned} & \begin{cases} t > 0, \\ \frac{1}{t} + t - 2,5 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t > 0, \\ t^2 - 2,5t + 1 > 0 \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} t > 0, \\ (t - 0,5)(t - 2) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t > 0, \\ \begin{cases} t < 0,5, \\ t > 2 \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < t < 0,5, \\ t > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда неравенство (4) равносильно совокупности неравенств

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 0 < x^{\log_{0,5} x} < 0,5, \\ x^{\log_{0,5} x} > 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \log_{0,5} x \cdot \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}, \\ \log_{0,5} x \cdot \log_2 x > \log_2 2 \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} -\log_2^2 x < -1, \\ -\log_2^2 x > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \log_2^2 x > 1, \\ \log_2^2 x < -1 \end{cases} \iff \log_2^2 x > 1 \iff \\ & \iff |\log_2 x| > 1 \iff \begin{cases} \log_2 x < -1, \\ \log_2 x > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(0; \frac{1}{2}) \cup (2; +\infty)$.

Задача 5. Решите неравенство

$$\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0. \quad (5)$$

Решение. Неравенство (5) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x+1 > 0, \\ \log_2 \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{\log_2 \frac{x+1}{x-1}} > 0 \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \log_2 \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{\log_2 \frac{x-1}{x+1}} > 0. \end{cases}$$

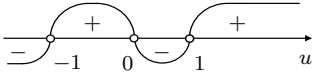


Рис. 2

Если $u = \log_2 \frac{x-1}{x+1}$, то

$$u - \frac{1}{u} > 0 \Leftrightarrow \frac{u^2 - 1}{u} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u+1)u(u-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < u < 0, \\ u > 1, \end{cases}$$

что устанавливаем методом числовых промежутков (рис. 2).

Тогда

$$-1 < \log_2 \frac{x-1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{x-1}{x+1} < 1,$$

$$\log_2 \frac{x-1}{x+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} > 2.$$

Неравенство (5) равносильно совокупности двух систем.

Первая система

$$\begin{cases} x > 1, \\ \frac{1}{2} < \frac{x-1}{x+1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x+1 < 2x-2 < 2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ (x+1) - (2x-2) < 0 < (2x+2) - (2x-2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 3-x < 0 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Вторая система не имеет решений:

$$\begin{cases} x > 1, \\ \frac{x-1}{x+1} > 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1, \\ x-1 > 2x+2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1, \\ x < -3. \end{cases}$$

Следовательно, решением неравенства (5) будет любое $x > 3$.

Ответ: $(3; +\infty)$.

Задача 6. Решите неравенство

$$\log_x(x^3 + 1) \log_{x+1} x - 2 \geq 0. \quad (6)$$

Решение. Неравенство (6) равносильно неравенству

$$\log_{x+1} x \log_x(x^3 + 1) \geq 2 \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_{x+1}(x^3 + 1) \geq 2. \end{cases}$$

Неравенство

$$\begin{aligned} \log_{x+1}(x^3 + 1) \geq 2 &\iff \log_{x+1}((x+1)(x^2 - x + 1)) \geq 2 \iff \\ &\iff 1 + \log_{x+1}(x^2 - x + 1) \geq 2 \iff \log_{x+1}(x^2 - x + 1) \geq 1. \end{aligned}$$

Если $x > 0$, то $x + 1 > 1$. А значит, при $x > 0$ неравенство

$$\log_{x+1}(x^2 - x + 1) \geq 1 \iff x^2 - x + 1 \geq x + 1 \iff x(x - 2) \geq 0,$$

то есть, $x \geq 2$.

Следовательно, множеством решений неравенства (6) будет числовой луч $[2; +\infty)$.

Ответ: $[2; +\infty)$.

Задача 7. Решите неравенство

$$\log_3(4^x + 1) + \log_{4^x + 1} 3 \geq 2,5. \quad (7)$$

Решение. Неравенство (7) равносильно неравенству

$$\log_3(4^x + 1) + \frac{1}{\log_3(4^x + 1)} \geq \frac{5}{2}. \quad (8)$$

Так как $4^x + 1 > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, то

$$\log_3(4^x + 1) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Умножив неравенство (8) на $\log_3(4^x + 1)$, получим равносильное неравенству (7) квадратичное относительно $\log_3(4^x + 1)$ неравенство

$$\begin{aligned} 2\log_3^2(4^x + 1) - 5\log_3(4^x + 1) + 2 &\geq 0 \iff \\ \iff (2\log_3(4^x + 1) - 1)(\log_3(4^x + 1) - 2) &\geq 0 \iff \\ \iff \begin{cases} \log_3(4^x + 1) \leq \frac{1}{2}, \\ \log_3(4^x + 1) \geq 2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 4^x + 1 \leq \sqrt{3}, \\ 4^x + 1 \geq 9 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} x \leq \log_4(\sqrt{3} - 1), \\ x \geq \log_4 8 \end{cases} &\iff \begin{cases} x \leq 0,5 \log_2(\sqrt{3} - 1), \\ x \geq 1,5. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; 0,5 \log_2(\sqrt{3} - 1)] \cup [1,5; +\infty)$.

Задача 8. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0. \quad (9)$$

Решение. Неравенство (9) равносильно неравенству

$$0 < \log_2 \log_{x-1} 9 < 1 \iff 1 < \log_{x-1} 9 < 2.$$

Если $0 < x - 1 < 1$, то $\log_{x-1} 9 < 0$. Поэтому полученное двойное неравенство при $0 < x - 1 < 1$ не выполняется.

Значит, у $\log_{x-1} 9$ основание $x - 1 > 1$.

Таким образом, неравенство (9) равносильно системе неравенств

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x - 1 > 1, \\ 1 < \log_{x-1} 9 < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 1 > 1, \\ x - 1 < 9 < (x - 1)^2 \end{cases} \iff \\
 & \iff \begin{cases} x - 1 > 1, \\ x - 1 < 9, \\ (x - 1)^2 > 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 1 > 1, \\ x - 1 < 9, \\ x - 1 > 3 \end{cases} \iff \\
 & \iff \begin{cases} x - 1 < 9, \\ x - 1 > 3 \end{cases} \iff 4 < x < 10.
 \end{aligned}$$

Ответ: (4; 10).

Задача 9. Решите неравенство

$$\log_x \log_3(9^x - 6) \geq 1. \quad (10)$$

Решение. Поскольку x является не только показателем степени, но и основанием логарифма, то возможны два случая, когда $0 < x < 1$ и когда $x > 1$.

Поэтому неравенство (10) равносильно совокупности двух систем. Первая система

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \log_x \log_3(9^x - 6) \geq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < \log_3(9^x - 6) \leq x \end{cases} \iff \\
 & \iff \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 1 < 9^x - 6 \leq 3^x \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 9^x - 6 > 1, \\ 9^x - 3^x - 6 \leq 0 \end{cases} \iff \\
 & \iff \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 9^x - 7 > 0, \\ (3^x + 2)(3^x - 3) \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 9^x - 7 > 0, \\ 3^x - 3 \leq 0 \end{cases} \iff \\
 & \iff \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 9^x > 7, \\ 3^x \leq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x > \log_9 7, \\ x \leq 1 \end{cases} \iff \log_9 7 < x < 1.
 \end{aligned}$$

Вторая система

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x > 1, \\ \log_x \log_3(9^x - 6) \geq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1, \\ \log_3(9^x - 6) \geq x \end{cases} \iff \\
 & \iff \begin{cases} x > 1, \\ 9^x - 6 \geq 3^x \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1, \\ 9^x - 3^x - 6 \geq 0 \end{cases} \iff \\
 & \iff \begin{cases} x > 1, \\ (3^x + 2)(3^x - 3) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1, \\ 3^x - 3 \geq 0 \end{cases} \iff \\
 & \iff \begin{cases} x > 1, \\ 3^x \geq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1, \\ x \geq 1 \end{cases} \iff x > 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: $(\log_9 7; 1) \cup (1; +\infty)$.

Задача 10. Решите неравенство

$$\log_x \log_4(2^x - 2) < 1. \quad (11)$$

Решение. Из задания неравенства (11) следует, что

$$2^x - 2 > 0 \iff 2^x > 2 \iff x > 1.$$

Так как $x > 1$, то неравенство (11) равносильно неравенству

$$\begin{aligned}
 & 0 < \log_4(2^x - 2) < x \iff 1 < 2^x - 2 < 4^x \iff \\
 & \iff \begin{cases} 2^x - 2 > 1, \\ 2^{2x} - 2^x + 2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2^x > 3, \\ \left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \end{cases} \iff \\
 & \iff 2^x > 3 \iff x > \log_2 3.
 \end{aligned}$$

Ответ: $(\log_2 3; +\infty)$.

Задача 11. Решите неравенство

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x} - 1} \geq 1.$$

Решение. Неравенство

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x} - 1} &\geq 1 \iff \sqrt{\log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x} - 1 \leq 0 \iff \\ &\iff \sqrt{\log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x} \leq 1 \iff 0 \leq \log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x \leq 1 \iff \\ &\iff 1 \leq \operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3} \iff \frac{\pi}{6} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

что устанавливаем с помощью единичной окружности (рис. 3).

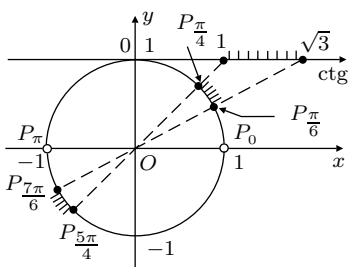


Рис. 3

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right] \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$

Задача 12. Решите неравенство

$$\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2.$$

Решение. Неравенство

$$\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2 \iff x^{\frac{1}{2} \log_2 \sqrt{x}} > 2 \iff x^{\frac{1}{4} \log_2 x} > 2 \iff$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_2^2 x > \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2^2 x > 4 \Leftrightarrow |\log_2 x| > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < -2, \\ \log_2 x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 0,25, \\ x > 4. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0,25) \cup (4; +\infty)$.

Задача 13. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \sqrt{1 - 4 \log_{\frac{1}{2}}^2 x} \leq 1. \quad (12)$$

Решение. Заменим $\log_{\frac{1}{2}} x$ на y и решим неравенство

$$y + \sqrt{1 - 4y^2} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 - 4y^2} \leq 1 - y \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4y^2 \geq 0, \\ 1 - y \geq 0, \\ 1 - 4y^2 \leq (1 - y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \leq \frac{1}{4}, \\ y \leq 1, \\ y(5y - 2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}, \\ \begin{cases} y \leq 0, \\ y \geq \frac{2}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq y \leq 0, \\ \frac{2}{5} \leq y \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Неравенство (12) равносильно совокупности неравенств

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 0, \\ \frac{2}{5} \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq \sqrt{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt[5]{4^4}}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt[5]{4^4}}{4}\right] \cup [1; \sqrt{2}]$.

Задача 14. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{\log_2(x-1)}}{x^2 - 3x - 4} \geq 0. \quad (13)$$

Решение. Неравенство (13) выполняется в двух случаях, когда

$$\begin{cases} \log_2(x-1) = 0, \\ x^2 - 3x - 4 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-1 = 1, \\ (x+1)(x-4) \neq 0 \end{cases} \iff x = 2,$$

и когда

$$\begin{cases} \log_2(x-1) > 0, \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-1 > 1, \\ (x+1)(x-4) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2, \\ x-4 > 0 \end{cases} \iff x > 4.$$

Ответ: $\{2\} \cup (4; +\infty)$.**Задача 15.** Решите неравенство

$$\frac{(x+4)(x-3)}{\log_2(x-1)} > 0. \quad (14)$$

Решение. Способ 1. Неравенство (14) имеет смысл при всех тех x из области определения логарифмической функции

$$y(x) = \log_2(x-1), \quad (15)$$

которые не являются её нулями:

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 < x < 2, \\ x > 2. \end{cases}$$

Если $x \in (1; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x+4 > 0$.

Поэтому неравенство (14) равносильно неравенству

$$\frac{x-3}{\log_2(x-1)} > 0 \iff \begin{cases} \begin{cases} x-3 < 0, \\ \log_2(x-1) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 > 0, \\ \log_2(x-1) > 0 \end{cases} \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x < 3, \\ 0 < x - 1 < 1, \\ x > 3, \\ x - 1 > 1 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x < 3, \\ 1 < x < 2, \\ x > 3, \\ x > 2 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 1 < x < 2, \\ x > 3. \end{cases} \right]$$

Способ 2. Логарифмическая функция (15) определена на числовом луче $(1; +\infty)$, непрерывна на нём и имеет один нуль — число 2.

При переходе через нуль функция (15) меняет знак (с минуса на плюс, как возрастающая).

Поэтому функция

$$f(x) = \frac{(x+4)(x-3)}{\log_2(x-1)} \quad \forall x \in (1; 2) \cup (2; +\infty) \quad (16)$$

непрерывна на $(1; 2)$ и на $(2; +\infty)$, имеет один нуль — число 3.

На числовом луче $(3; +\infty)$ функция (16) непрерывна и не имеет нулей, а значит, сохраняет свой знак на нём.

Число $5 \in (3; +\infty)$, значение $f(5) = \frac{9 \cdot 2}{2} = 9 > 0$.

Стало быть,

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (3; +\infty).$$

Функция (16) меняет знак при переходе через свой нуль $x = 3$ и при переходе через точку разрыва $x = 2$.

Поэтому на интервале $(2; 3)$ функция (16) отрицательная, а на интервале $(1; 2)$ функция (16) положительная.

В принятых обозначениях неравенство (14) имеет вид

$$f(x) > 0,$$

а его множеством решений будет $(1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Задача 16. Решите неравенство

$$3^{x-1} > 1 - \lg x. \quad (17)$$

Решение. При $x = 1$ значения выражений 3^{x-1} и $1 - \lg x$ одинаковые и равны 1:

$$3^{1-1} = 3^0 = 1; \quad 1 - \lg 1 = 1 - 0 = 1.$$

Способ 1. Функция

$$f(x) = 3^{x-1}, D(f) = \mathbb{R},$$

возрастает.

Действительно¹, сложная функция

$$f(x) = \varphi(\psi(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

является композицией двух возрастающих функций.

Внутренняя функция

$$\psi(x) = x - 1, D(\psi) = \mathbb{R},$$

возрастает как линейная функция с положительным угловым коэффициентом ($k = 1 > 0$).

Внешняя функция

$$\varphi(x) = 3^x, D(\varphi) = \mathbb{R},$$

является показательной функцией с основанием 3, большим 1, и поэтому возрастает.

Значит, функция f возрастает.

Функция

$$g(x) = 1 - \lg x, D(g) = (0; +\infty),$$

убывает, так как она является разностью

$$g(x) = \delta(x) - \gamma(x) \quad \forall x \in (0; +\infty)$$

сужения на $(0; +\infty)$ постоянной функции

$$\delta(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

и возрастающего десятичного логарифма

$$\gamma(x) = \lg x \quad \forall x \in (0; +\infty).$$

Тогда

$$3^{x-1} > 1 - \lg x \iff x > 1. \quad (18)$$

¹Если использовать представление $3^{x-1} = \frac{1}{3} \cdot 3^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, то функция f возрастает как прямая пропорциональность по отношению к возрастающей показательной функции $\varphi(x) = 3^x$, $D(\varphi) = \mathbb{R}$.

В самом деле, функция f возрастает и при $x = 1$ принимает значение $f(1) = 1$. Поэтому

$$f(x) < 1 \quad \forall x \in (-\infty; 1), \quad f(1) = 1 \quad \text{и} \quad f(x) > 1 \quad \forall x \in (1; +\infty).$$

Функция g убывает и при $x = 1$ принимает значение $g(1) = 1$. Поэтому

$$g(x) > 1 \quad \forall x \in (0; 1), \quad g(1) = 1 \quad \text{и} \quad g(x) < 1 \quad \forall x \in (1; +\infty).$$

Следовательно, $f(x) > g(x)$ тогда и только тогда, когда $x > 1$. Это и выражено равносильностью (18).

В принятых обозначениях неравенство (17) имеет вид

$$f(x) > g(x),$$

а его решением будет любое действительное x , большее 1.

Способ 2. Неравенство (17) запишем в виде

$$3^{x-1} + \lg x > 1.$$

Функция

$$s(x) = 3^{x-1} + \lg x, \quad D(s) = (0; +\infty),$$

возрастает как сумма

$$s(x) = f(x) + \gamma(x) \quad \forall x \in (0; +\infty)$$

возрастающих функций: сужения возрастающей показательной функции f на $(0; +\infty)$ и возрастающего десятичного логарифма γ .

Следовательно, функция s возрастает и при $x = 1$ принимает значение $s(1) = 1$.

Поэтому $s(x) > 1$, если и только если $x > 1$.

В принятых обозначениях неравенство (17) имеет вид

$$s(x) > 1,$$

а его решением будет любое действительное x , большее 1.

Способ 3. Производная

$$s'(x) = 3^{x-1} \ln 3 + \frac{1}{x \ln 10} > 0 \quad \forall x \in (0; +\infty).$$

Поэтому функция s является возрастающей.

Далее решаем как и в способе 2.

Ответ: $(1; +\infty)$.

Задача 17. Для всех $x \geq 1$ решите неравенство

$$\lg 2^x + 2^{\lg x} > 1. \quad (19)$$

Решение. Заметим, что функция

$$s(x) = \lg 2^x + 2^{\lg x}, \quad D(s) = [1; +\infty),$$

при $x = 1$ принимает значение

$$s(1) = \lg 2^1 + 2^{\lg 1} = \lg 2 + 2^0 = 1 + \lg 2 > 1.$$

Функции

$$\varphi(x) = g(f(x)) = \lg 2^x, \quad \psi(x) = f(g(x)) = 2^{\lg x}$$

на числовом луче $[1; +\infty)$ возрастают как сложные, построенные на основании сужений возрастающих функций

$$f(x) = 2^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad g(x) = \lg x \quad \forall x \in (0; +\infty).$$

Тогда функция-сумма

$$s(x) = \varphi(x) + \psi(x) \quad \forall x \in [1; +\infty)$$

будет возрастающей.

Наименьшее значение достигается при $x = 1$ и $s(1) = 1 + \lg 2 > 1$.

Следовательно, $s(x) > 1 \quad \forall x \in [1; +\infty)$.

Значит, неравенство (19) имеет место при любом $x \geq 1$.

Ответ: $[1; +\infty)$.

Задача 18. Найдите все целые числа x , удовлетворяющие неравенству

$$x - \frac{1}{2} < 2 \log_5(x + 2). \quad (20)$$

Решение. Неравенство (20) имеет смысл при $x > -2$ и равносильно неравенству

$$f(x) < 0,$$

где функция

$$f(x) = x - \frac{1}{2} - 2 \log_5(x + 2) \quad \forall x \in (-2; +\infty).$$

Разность

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= 1 - 2\log_5(x+3) + 2\log_5(x+2) = \\ &= 1 - 2\log_5\left(1 + \frac{1}{x+2}\right) \quad \forall x \in (-2; +\infty), \end{aligned}$$

и является положительной при любом целом $x \geq -1$, так как

$$1 + \frac{1}{x+2} < \sqrt{5} \iff \log_5\left(1 + \frac{1}{x+2}\right) < \frac{1}{2} \quad \forall x \in [-1; +\infty).$$

Следовательно,

$$f(x+1) > f(x) \quad \forall x \in \mathbb{Z}, x \geq -1,$$

то есть, при каждом последующем целом $x+1$ функция f принимает значение $f(x+1)$, большее, чем её значение $f(x)$ при предыдущем целом $x \geq -1$.

Найдём наибольшее целое $x \geq -1$, при котором $f(x) < 0$.

Если $x = 2$, то

$$f(2) = 1 \frac{1}{2} - 2\log_5 4 = \log_5 5^{\frac{3}{2}} - \log_5 16 = \log_5 \frac{5\sqrt{5}}{16} < 0,$$

так как $\frac{5\sqrt{5}}{16} < 1$.

Если $x = 3$, то

$$f(3) = 2 \frac{1}{2} - 2\log_5 5 = \frac{1}{2} > 0.$$

Таким образом, $f(x) < 0$ при $x = -1, 0, 1$ и 2 , при целых $x \geq 3$ значения $f(x) > 0$.

Ответ: $-1, 0, 1, 2$.

Задача 19. Решите относительно x неравенство

$$\sec^2(x+y) \cdot \log_3(2+2^{|x|}) \leq 1. \quad (21)$$

Решение. Выражение $\sec^2(x+y) \geq 1$ при всех тех x, y , при которых оно определено.

Так как $2^{|x|} \geq 1$, то

$$\log_3(2 + 2^{|x|}) \geq \log_3 3 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Значит,

$$\sec^2(x + y) \cdot \log_3(2 + 2^{|x|}) \geq 1.$$

Следовательно, неравенство (21) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sec^2(x + y) = 1, \\ \log_3(2 + 2^{|x|}) = 1. \end{cases} \quad (22)$$

Уравнение

$$\log_3(2 + 2^{|x|}) = 1 \iff 2 + 2^{|x|} = 3 \iff 2^{|x|} = 1 \iff x = 0.$$

При $x = 0$ первое уравнение системы (22) будет иметь вид

$$\sec^2 y = 1 \iff \sec y = \pm 1 \iff \cos y = \pm 1 \iff y = \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{0\}$ при $y = \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$; $\emptyset$ при $y \neq \pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Задача 20. Относительно x решите неравенство

$$\log_{2 \cos a}(x + 4) \geq 2 \log_{2 \cos a}(x + 2). \quad (23)$$

Решение. Если $x + 2 > 0$, то $x + 4 > 0$. В соответствии с определением логарифма неравенство (23) определено при $x + 2 > 0$ и равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x + 2 > 0, \\ \log_{2 \cos a}(x + 4) \geq \log_{2 \cos a}(x + 2)^2. \end{cases} \quad (24)$$

Дальнейшее решение зависит от значений параметра a и основано на свойстве монотонности логарифмической функции.

Если $2 \cos a \leq 0$ или $2 \cos a = 1$, то неравенство (23) не имеет смысла.

Уравнение

$$2 \cos a = 1 \iff \cos a = \frac{1}{2} \iff a = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l \quad \forall l \in \mathbb{Z}.$$

Неравенство

$$\cos a \leq 0 \iff \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq a \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

что устанавливаем с помощью единичной окружности (рис. 4).

Следовательно, если

$$a \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \frac{3\pi}{2} + 2\pi m \right] \cup \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m \right\} \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

то неравенство (23) решений не имеет.

Будем различать два случая:

$$0 < 2 \cos a < 1 \quad \text{и} \quad 2 \cos a > 1.$$

Двойное тригонометрическое неравенство

$$0 < 2 \cos a < 1 \iff 0 < \cos a < \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi s < a < -\frac{\pi}{3} + 2\pi s, \\ \frac{\pi}{3} + 2\pi s < a < \frac{\pi}{2} + 2\pi s \quad \forall s \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

что устанавливаем с помощью единичной окружности (рис. 5).

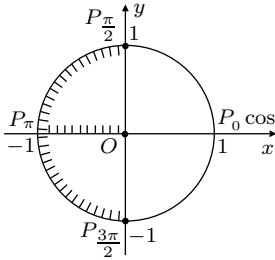


Рис. 4

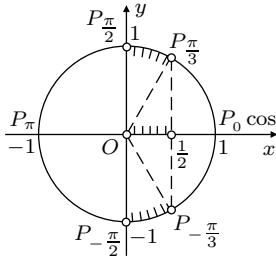


Рис. 5

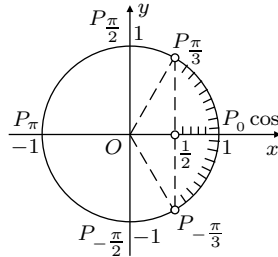


Рис. 6

Если $0 < 2 \cos a < 1$, то система (24) равносильна системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2 > 0, \\ x + 4 \leq (x + 2)^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + 2 > 0, \\ x^2 + 3x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2 > 0, \\ x(x + 3) \geq 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} x + 2 > 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -2, \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, если параметр

$$a \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi s; -\frac{\pi}{3} + 2\pi s \right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi s; \frac{\pi}{2} + 2\pi s \right) \quad \forall s \in \mathbb{Z},$$

то решением неравенства (23) будет любое неотрицательное число.

С помощью единичной окружности (рис. 6) решаем неравенство

$$2 \cos a > 1 \iff \cos a > \frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{3} + 2\pi p < a < \frac{\pi}{3} + 2\pi p \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Если $2 \cos a > 1$, то система (24) равносильна системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2 > 0, \\ x + 4 \geq (x + 2)^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + 2 > 0, \\ x(x + 3) \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2 > 0, \\ x \leq 0 \end{cases} \iff \\ &\iff -2 < x \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, если

$$a \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi p; \frac{\pi}{3} + 2\pi p \right) \quad \forall p \in \mathbb{Z},$$

то множеством решений неравенства (23) будет полуинтервал $(-2; 0]$.

$$\text{Ответ: } \emptyset \text{ при } a \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right] \cup \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right\} \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

$$[0; +\infty) \text{ при } a \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}; \quad (-2; 0] \text{ при } a \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Задача 21. Относительно x решите неравенство

$$\log_p \frac{1 + \log_p^2 x}{1 - \log_p x} < 0. \quad (25)$$

Решение. Неравенство (25) имеет смысл при положительных значениях параметра p , отличных от 1.

Пусть $0 < p < 1$. Тогда неравенство (25) равносильно неравенству

$$\begin{aligned} \frac{1 + \log_p^2 x}{1 - \log_p x} > 1 &\iff \frac{1 + \log_p^2 x}{1 - \log_p x} - 1 > 0 \iff \\ &\iff \frac{(\log_p x + 1) \log_p x}{1 - \log_p x} > 0 \iff \begin{cases} \log_p x < -1, \\ 0 < \log_p x < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > \frac{1}{p}, \\ p < x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть $p > 1$. Тогда неравенство (25) равносильно неравенству

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1 + \log_p^2 x}{1 - \log_p x} < 1 &\iff \begin{cases} \frac{1 + \log_p^2 x}{1 - \log_p x} > 0, \\ \frac{1 + \log_p^2 x}{1 - \log_p x} < 1 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} 1 - \log_p x > 0, \\ \frac{(\log_p x + 1) \log_p x}{1 - \log_p x} < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - \log_p x > 0, \\ (\log_p x + 1) \log_p x < 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} \log_p x < 1, \\ -1 < \log_p x < 0 \end{cases} \iff -1 < \log_p x < 0 \iff \frac{1}{p} < x < 1. \end{aligned}$$

Ответ: $\emptyset \quad \forall p \in (-\infty; 0] \cup \{1\}; (p; 1) \cup \left(\frac{1}{p}; +\infty\right)$ при $0 < p < 1$;
 $\left(\frac{1}{p}; 1\right)$ при $p > 1$.

Задача 22. Найдите все значения c , при каждом из которых неравенство

$$-1 + \log_5(4cx^2 - x + 4c) \leq \log_5(4x^2 + 4) \quad (26)$$

выполняется при всех действительных x .

Решение. Неравенство (26) равносильно неравенству

$$\log_5(4cx^2 - x + 4c) \leq \log_5(5 \cdot 4(x^2 + 1)) \iff$$

$$\iff 0 < 4cx^2 - x + 4c \leq 20(x^2 + 1) \iff$$

$$\iff \begin{cases} 4cx^2 - x + 4c > 0, \\ 4(5 - c)x^2 + x + 4(5 - c) \geq 0. \end{cases}$$

Строгое неравенство

$$4cx^2 - x + 4c > 0$$

выполняется при всех действительных x в случае, когда оно является квадратичным ($c \neq 0$) с положительным коэффициентом при x^2 ($c > 0$) и отрицательным дискриминантом ($D = 1 - 64c^2 < 0$).

Нестрогое неравенство

$$4(5 - c)x^2 + x + 4(5 - c) \geq 0$$

выполняется при всех действительных x в случае, когда оно является квадратичным ($c \neq 5$) с положительным коэффициентом при x^2 ($c < 5$) и неположительным дискриминантом ($D = 1 - 64(5 - c)^2 \leq 0$).

Таким образом, неравенство (26) выполняется при всех действительных x , если и только если

$$\begin{cases} c > 0, \\ 1 - 64c^2 < 0, \\ c < 5, \\ 1 - 64(5 - c)^2 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < c < 5, \\ c^2 > \frac{1}{64}, \\ (5 - c)^2 \geq \frac{1}{64} \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < c < 5, \\ c > \frac{1}{8}, \\ 5 - c \geq \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < c < 5, \\ c > \frac{1}{8}, \\ c \leq 4\frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{8} < c \leq 4\frac{7}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8} < c \leq 4\frac{7}{8}$.

Задача 23. Решите неравенство

$$\log_{0,5} |\cos x| \cdot \log_5 (x^2 - 9) < 0. \quad (27)$$

Решение. Поскольку $0 \leq |\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, то $\log_{0,5} |\cos x| \geq 0$ при всех тех x , при которых $\cos x \neq 0$, причём $\log_{0,5} |\cos x| = 0$, когда $|\cos x| = 1$.

Стало быть, неравенство (27) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ |\cos x| \neq 1, \\ \log_5 (x^2 - 9) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi k, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ 0 < x^2 - 9 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi k}{2}, \\ |x| > 3, \\ |x| < \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi k}{2} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \\ \begin{cases} -\sqrt{10} < x < -3, \\ 3 < x < \sqrt{10} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{10} < x < -\pi, \\ -\pi < x < -3, \\ 3 < x < \pi, \\ \pi < x < \sqrt{10} \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $(-\sqrt{10}; -\pi) \cup (-\pi; -3) \cup (3; \pi) \cup (\pi; \sqrt{10})$.

Задача 24. Решите неравенство

$$\log_{|x|} (\sqrt{9 - x^2} - x - 1) \geq 1. \quad (28)$$

Решение. В соответствии с определением логарифма и монотонностью логарифмической функции неравенство (28) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 0 < |x| < 1, \\ 0 < \sqrt{9-x^2} - x - 1 \leq |x| \end{cases} \quad (29)$$

и

$$\begin{cases} |x| > 1, \\ \sqrt{9-x^2} - x - 1 \geq |x|. \end{cases} \quad (30)$$

Система (29) равносильна совокупности двух систем.
Первая система не имеет решений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -1 < x < 0, \\ 0 < \sqrt{9-x^2} - x - 1 \leq -x \end{cases} &\iff \begin{cases} -1 < x < 0, \\ \sqrt{9-x^2} > x+1, \\ \sqrt{9-x^2} \leq 1 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} -1 < x < 0, \\ 9-x^2 > (x+1)^2, \\ 9-x^2 \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 < x < 0, \\ x^2+x-4 < 0, \\ x^2 \geq 8 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} -1 < x < 0, \\ \left(x + \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right) < 0, \\ |x| \geq 2\sqrt{2} \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} -1 < x < 0, \\ x + \frac{1+\sqrt{17}}{2} > 0, \\ -x \geq 2\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -1 < x < 0, \\ x > -\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \\ x \leq -2\sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Вторая система

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < \sqrt{9-x^2} - x - 1 \leq x \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \sqrt{9-x^2} > x+1, \\ \sqrt{9-x^2} \leq 2x+1 \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 9 - x^2 > (x + 1)^2, \\ 9 - x^2 \leq (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 + x - 4 < 0, \\ 5x^2 + 4x - 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \left(x + \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right) \left(x - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right) < 0, \\ \left(x + \frac{2(1 + \sqrt{11})}{5}\right) \left(x - \frac{2(\sqrt{11} - 1)}{5}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < 0, \\ x - \frac{2(\sqrt{11} - 1)}{5} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x < \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \\ x \geq \frac{2(\sqrt{11} - 1)}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{11} - 1)}{5} \leq x < 1,$$

так как $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} > 1$, а $\frac{2(\sqrt{11} - 1)}{5} < 1$.

Система (30) равносильна совокупности двух систем.

Первая система

$$\begin{cases} x < -1, \\ \sqrt{9 - x^2} - x - 1 \geq -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ \sqrt{9 - x^2} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ 9 - x^2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x^2 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ |x| \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ -x \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq x < -1.
\end{aligned}$$

Вторая система не имеет решений:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x > 1, \\ \sqrt{9 - x^2} - x - 1 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \sqrt{9 - x^2} \geq 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 9 - x^2 \geq (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 5x^2 + 4x - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \left(x + \frac{2(1 + \sqrt{11})}{5}\right) \left(x - \frac{2(\sqrt{11} - 1)}{5}\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x - \frac{2(\sqrt{11} - 1)}{5} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \leq \frac{2(\sqrt{11} - 1)}{5}, \end{cases}
\end{aligned}$$

так как $\frac{2(\sqrt{11} - 1)}{5} < 1$.

Итак, множеством решений неравенства (28) будет объединение полуинтервалов $[-2\sqrt{2}; -1)$ и $\left[\frac{2(\sqrt{11} - 1)}{5}; 1\right)$.

Ответ: $[-2\sqrt{2}; -1) \cup \left[\frac{2(\sqrt{11} - 1)}{5}; 1\right)$.

Задача 25. Относительно x решите неравенство

$$\log_a(\sqrt{25-x^2}-1) \geq \log_a(|x|+1). \quad (31)$$

Решение. В соответствии с определением логарифма неравенство (31) относительно параметра a имеет смысл при $a > 0$ и $a \neq 1$.

Рассмотрим два случая.

I. Если $0 < a < 1$, то логарифмическая функция с основанием a убывает, а поэтому логарифмическое неравенство (31) равносильно двойному иррациональному неравенству

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt{25-x^2}-1 \leq |x|+1 &\iff \begin{cases} \sqrt{25-x^2} > 1, \\ \sqrt{25-x^2} \leq |x|+2 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 25-x^2 > 1, \\ 25-x^2 \leq (|x|+2)^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} x^2 < 24, \\ 2|x|^2+4|x|-21 \geq 0 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} |x| < 2\sqrt{6}, \\ \left(|x| + \frac{2+\sqrt{46}}{2}\right) \left(|x| - \frac{-2+\sqrt{46}}{2}\right) \geq 0 \end{cases} &\iff \\ \iff \begin{cases} |x| < 2\sqrt{6}, \\ |x| - \frac{-2+\sqrt{46}}{2} \geq 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} |x| < 2\sqrt{6}, \\ |x| \geq \frac{-2+\sqrt{46}}{2} \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} -2\sqrt{6} < x < 2\sqrt{6}, \\ \begin{cases} x \leq \frac{2-\sqrt{46}}{2}, \\ x \geq \frac{-2+\sqrt{46}}{2} \end{cases} \end{cases} &\iff \begin{cases} -2\sqrt{6} < x \leq \frac{2-\sqrt{46}}{2}, \\ \frac{-2+\sqrt{46}}{2} \leq x < 2\sqrt{6}. \end{cases} \end{aligned}$$

II. Если $a > 1$, то логарифмическая функция с основанием a возрастает, а поэтому неравенство (31) равносильно неравенству

$$\sqrt{25-x^2}-1 \geq |x|+1 \iff \sqrt{25-x^2} \geq |x|+2 \iff$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow 25 - x^2 \geq (|x| + 2)^2 \Leftrightarrow 2|x|^2 + 4|x| - 21 \leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(|x| + \frac{2 + \sqrt{46}}{2} \right) \left(|x| - \frac{-2 + \sqrt{46}}{2} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow |x| - \frac{-2 + \sqrt{46}}{2} \leq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{-2 + \sqrt{46}}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{46}}{2} \leq x \leq \frac{-2 + \sqrt{46}}{2}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\emptyset$ при любом $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$;

$$\begin{aligned}
 &\left(-2\sqrt{6}; \frac{2 - \sqrt{46}}{2} \right] \cup \left[\frac{-2 + \sqrt{46}}{2}; 2\sqrt{6} \right) \text{ при любом } a \in (0; 1); \\
 &\left[\frac{2 - \sqrt{46}}{2}; \frac{-2 + \sqrt{46}}{2} \right] \text{ при любом } a \in (1; +\infty).
 \end{aligned}$$

Задача 26. Решите неравенство

$$(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1) \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x} (\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1) \leq 0. \quad (32)$$

Решение. Неравенство (32) имеет смысл при

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ -2(x^2 - 4x + 3) \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x - 3) = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Выражение в левой части неравенства (32) при $x = 1$ принимает значение

$$\log_5 \frac{1}{5} + 1 = -1 + 1 = 0,$$

а при $x = 3$ — значение

$$\log_5 \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(3 \log_5 \frac{3}{5} + 1 \right) = \frac{1}{3} \log_5 \frac{27}{25} > 0.$$

Стало быть, решением неравенства (32) является одно число — 1.

Ответ: $\{1\}$.

Задача 27. Решите неравенство

$$\frac{\log_5(x^2 - 4x + 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3}{\sqrt{2 - 5x - 3x^2}} \geq 0. \quad (33)$$

Решение. Выражение $\sqrt{2 - 5x - 3x^2}$ не принимает отрицательных значений, а поскольку оно является знаменателем дроби, то должно быть положительным:

$$\begin{aligned} 2 - 5x - 3x^2 > 0 &\iff 3x^2 + 5x - 2 < 0 \iff (x + 2)(3x - 1) < 0 \iff \\ &\iff -2 < x < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (33) надо рассматривать на интервале $\left(-2; \frac{1}{3}\right)$, на котором оно равносильно неравенству

$$\log_5(x^2 - 4x + 11)^2 - 3 \log_{11}(x^2 - 4x - 11) \geq 0. \quad (34)$$

Квадратный трёхчлен

$$x^2 - 4x + 11 = (x^2 - 4x + 4) + 7 = (x - 2)^2 + 7 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

а квадратный трёхчлен

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 11 > 0 &\iff (x - 2)^2 - 15 > 0 \iff |x - 2| > \sqrt{15} \iff \\ &\iff \begin{cases} x < 2 - \sqrt{15}, \\ x > 2 + \sqrt{15}. \end{cases} \end{aligned}$$

В соответствии с определением логарифмической функции устанавливаем, что неравенство (33) равносильно неравенству (34) на интервале $(-2; 2 - \sqrt{15})$.

Квадратичная функция

$$y(x) = x^2 - 4x - 11 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

на числовом луче $(-\infty; 2]$ убывает.

Поэтому функция

$$f(x) = x^2 - 4x - 11 \quad \forall x \in (-2; 2 - \sqrt{15})$$

убывает.

Её множество значений $E(f) = (f(2 - \sqrt{15}); f(-2))$.

Поскольку $f(2 - \sqrt{15}) = 0$, а $f(-2) = 4 + 8 - 11 = 1$, то $E(f) = (0; 1)$.

Тогда сложная логарифмическая функция

$$g(x) = \log_{11}(x^2 - 4x - 11) \quad \forall x \in (-2; 2 - \sqrt{15})$$

является отрицательной.

Квадратный трёхчлен

$$x^2 - 4x + 11 = (x - 2)^2 + 7 > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

значит,

$$\log_{11}(x^2 - 4x - 11)^2 > \log_5 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Итак, в левой части неравенства (34) расположено положительное выражение, и, следовательно, неравенство (34) выполняется на интервале $(-2; 2 - \sqrt{15})$.

Интервал $(-2; 2 - \sqrt{15})$ — множество решений неравенства (33).

Ответ: $(-2; 2 - \sqrt{15})$.

Задача 28. Решите неравенство

$$\left| \log_2 \frac{x+3}{6} \right|^{x^2-3x} \leq 1. \quad (35)$$

Решение. Рассмотрим два случая.

I. Основание степени

$$\begin{aligned}
 0 < \left| \log_2 \frac{x+3}{6} \right| \leq 1 &\iff \begin{cases} -1 \leq \log_2 \frac{x+3}{6} < 0, \\ 0 < \log_2 \frac{x+3}{6} \leq 1 \end{cases} \iff \\
 \iff \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \frac{x+3}{6} < 1, \\ 1 < \frac{x+3}{6} \leq 2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3 \leq x+3 < 6, \\ 6 < x+3 \leq 12 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq x < 3, \\ 3 < x \leq 9. \end{cases}
 \end{aligned}$$

В этом случае неравенство (35) приводим к неравенству

$$x^2 - 3x \geq 0 \iff x(x-3) \geq 0 \iff \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 3, \end{cases}$$

причём $x \in [0; 3) \cup (3; 9]$.

Следовательно, любое x , принадлежащее множеству $\{0\} \cup (3; 9]$, будет решением неравенства (35).

II. Основание степени

$$\begin{aligned}
 \left| \log_2 \frac{x+3}{6} \right| > 1 &\iff \begin{cases} \log_2 \frac{x+3}{6} < -1, \\ \log_2 \frac{x+3}{6} > 1 \end{cases} \iff \\
 \iff \begin{cases} 0 < \frac{x+3}{6} < \frac{1}{2}, \\ \frac{x+3}{6} > 2 \end{cases} &\iff \begin{cases} -3 < x < 0, \\ x > 9. \end{cases}
 \end{aligned}$$

В этом случае из неравенства (35) получаем, что

$$x^2 - 3x \leq 0 \iff x(x-3) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 3,$$

при $x \in (-3; 0) \cup (9; +\infty)$.

Значит, во втором случае у неравенства (35) решений нет.

Ответ: $\{0\} \cup (3; 9]$.

Задача 29. Решите неравенство

$$\left| \log_{\frac{1}{3}}(x+27) + \log_3(16-2x) - \log_{\frac{1}{3}}x \right| +$$

$$+ \log_{\frac{1}{3}}(x+27) + \log_3(16-2x) > \log_{\frac{1}{3}}x. \quad (36)$$

Решение. Неравенство (36) имеет смысл, когда

$$\begin{cases} x+27 > 0, \\ 16-2x > 0, \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ 8-x > 0 \end{cases} \iff 0 < x < 8.$$

При

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}}x - \log_{\frac{1}{3}}(x+27) - \log_3(16-2x), \quad D(f) = (0; 8),$$

неравенство (36) будет иметь вид

$$|f(x)| > f(x), \quad (37)$$

и выполняется тогда и только тогда, когда $f(x) < 0$.

Действительно, если $f(x) < 0$, то неравенство (37) выполняется, так как модуль $|f(x)| \geq 0 \quad \forall x \in D(f)$.

Если же $f(x) \geq 0$, то $|f(x)| = f(x)$, и неравенство (37) примет вид $f(x) > f(x)$, что не верно при любом x .

Стало быть, неравенство (36) равносильно неравенству

$$\log_{\frac{1}{3}}x - \log_{\frac{1}{3}}(x+27) - \log_3(16-2x) < 0 \iff$$

$$\iff \log_{\frac{1}{3}}x - \log_{\frac{1}{3}}(x+27) + \log_{\frac{1}{3}}(16-2x) < 0. \quad (38)$$

Потенцируя по основанию $\frac{1}{3}$ неравенство (38) при $0 < x < 8$, получаем равносильную неравенству (36) систему

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 8, \\ \frac{x(16-2x)}{x+27} > 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 8, \\ \frac{x(16-2x) - (x+27)}{x+27} > 0 \end{array} \right\} \iff \\
& \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 8, \\ x(2x-16) + x + 27 < 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 8, \\ 2x^2 - 15x + 27 < 0 \end{array} \right\} \iff \\
& \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 8, \\ (x-3)(2x-9) < 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 8, \\ 3 < x < 4,5 \end{array} \right\} \iff 3 < x < 4,5.
\end{aligned}$$

Ответ: $(3; 4,5)$.

Задача 30. Решите неравенство

$$\left| \log_{\sqrt{x^2-x-2}} 3 - 3^{\sqrt{x^2-x-1}} \right| + 2 \log_{x^2-x-2} 3 \geq 3^{\sqrt{x^2-x-1}}. \quad (39)$$

Решение. Неравенство имеет смысл, когда

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x - 2 > 0, \\ x^2 - x - 2 \neq 1, \\ x^2 - x - 1 \geq 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x - 2 > 0, \\ x^2 - x - 3 \neq 0, \\ (x^2 - x - 2) + 1 \geq 0 \end{array} \right\} \iff \\
& \iff \left\{ \begin{array}{l} (x+1)(x-2) > 0, \\ \left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \neq 0, \end{array} \right.
\end{aligned}$$

то есть, на множестве A , равном объединению

$$\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right).$$

Пусть

$$f(x) = 3^{\sqrt{x^2-x-1}} - 2 \log_{x^2-x-2} 3.$$

Тогда, с учётом того, что

$$\log_{\sqrt{x^2-x-2}} 3 = 2 \log_{x^2-x-2} 3,$$

неравенство (39) будет иметь вид

$$|f(x)| \geq f(x), \quad (40)$$

и выполняется при любом x из области определения функции f .

Действительно, если $f(x) < 0$, то неравенство (40) имеет место, так как $|f(x)| \geq 0 \quad \forall x \in D(f)$.

Если же $f(x) \geq 0$, то модуль $|f(x)| = f(x)$, и неравенство (40) примет вид $f(x) \geq f(x)$, что верно при любом x из области определения функции f .

Значит, и при $f(x) \geq 0$ неравенство (40) выполняется.

Таким образом, неравенство (39) выполняется при всех тех x , при которых оно имеет смысл. Поэтому A — множество его решений.

Ответ:

$$\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right).$$

Глава 3

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Решение показательных и логарифмических систем базируется на тождественных преобразованиях показательных и логарифмических выражений. При этом приходим к решению простейших показательных и логарифмических уравнений и неравенств, а также алгебраических уравнений и неравенств. Каких-либо специальных видов систем не выделяем.

Методы и приёмы решения систем показательных, логарифмических и показательно-степенных уравнений и неравенств рассмотрим на конкретных примерах.

Задача 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 5^x - 5^y = 4. \end{cases} \quad (1)$$

Решение. Способ 1. Система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 5, \\ 5^x + (-5^y) = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 5^x \cdot (-5^y) = -5, \\ 5^x + (-5^y) = 4. \end{cases}$$

Согласно обратной теореме Виета $u = 5^x > 0$ и $v = -5^y < 0$ являются корнями приведённого квадратного уравнения

$$z^2 - 4z - 5 = 0 \iff (z + 1)(z - 5) = 0 \iff \begin{cases} z = -1, \\ z = 5. \end{cases}$$

Так как $u > 0$, а $v < 0$, то система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} 5^x = 5, \\ -5^y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Способ 2. Из первого уравнения системы (1) выразим

$$y = 1 - x$$

и подставим во второе уравнение этой системы¹:

$$\begin{aligned} 5^x - 5^{1-x} = 4 &\iff 5^x - \frac{5}{5^x} = 4 \iff 5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 5 = 0 \iff \\ &\iff (5^x + 1)(5^x - 5) = 0 \iff 5^x = 5 \iff x = 1. \end{aligned}$$

Если $x = 1$, то $y = 0$.

Ответ: $\{(1; 0)\}$.

Задача 2. Решите систему

$$\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6, \\ x^2 + 5y^2 = 6xy. \end{cases} \quad (2)$$

Решение. Первое уравнение системы (2) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \left(2^{\frac{x+y}{6}}\right)^2 + 2^{\frac{x+y}{6}} - 6 = 0 &\iff \left(2^{\frac{x+y}{6}} + 3\right)\left(2^{\frac{x+y}{6}} - 2\right) = 0 \iff \\ &\iff 2^{\frac{x+y}{6}} = 2 \iff \frac{x+y}{6} = 1 \iff x+y = 6. \end{aligned}$$

¹Если использовать равносильность

$$af(x) + \frac{b}{f(x)} = ac + \frac{b}{c} \iff \begin{cases} f(x) = c, \\ f(x) = \frac{b}{ac} \end{cases} \quad (abc \neq 0, b \neq ac^2)$$

при $a = 1$, $b = -5$, $c = -1$, то уравнение

$$5^x - \frac{5}{5^x} = 4 \iff 5^x - \frac{5}{5^x} = 1 \cdot (-1) + \frac{-5}{-1} \iff 5^x = 5,$$

так как $5^x \neq -1$.

Второе уравнение системы (2) равносильно уравнению

$$x^2 - 6xy + 5y^2 = 0 \iff (x - y)(x - 5y) = 0.$$

Следовательно, система (2) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x = y, \\ x + y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3, \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 5y, \\ x + y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1, \\ x = 5. \end{cases}$$

Решениями системы (2) будут $x = y = 3$ и $x = 5, y = 1$.

Ответ: $\{(3, 3), (5, 1)\}$.

Задача 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy - x - y = 5, \\ 2^{x-y} - (0,5)^{x-y} = 1,5. \end{cases} \quad (3)$$

Решение. Показательное уравнение¹

$$\begin{aligned} 2^{x-y} - (0,5)^{x-y} = 1,5 &\iff 2^{x-y} - \frac{1}{2^{x-y}} - \frac{3}{2} = 0 \iff \\ &\iff 2 \cdot 2^{2(x-y)} - 3 \cdot 2^{x-y} - 2 = 0 \iff \\ &\iff (2 \cdot 2^{x-y} + 1)(2^{x-y} - 2) = 0 \iff 2^{x-y} - 2 = 0 \iff x - y = 1. \end{aligned}$$

Система (3) равносильна системе алгебраических уравнений

¹ Если использовать равносильность

$$f(x) - \frac{1}{f(x)} = c - \frac{1}{c} \iff \begin{cases} f(x) = c, \\ f(x) = -\frac{1}{c}, \end{cases}$$

то сразу устанавливаем, что уравнение

$$2^{x-y} - \frac{1}{2^{x-y}} = 2 - \frac{1}{2} \iff 2^{x-y} = 2.$$

При этом учитываем, что $2^{x-y} \neq -\frac{1}{2}$, так как $2^{x-y} > 0$.

$$\begin{cases} xy - x - y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1, \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)(x - 4) = 0, \\ y = x - 1, \end{cases}$$

и решениями системы (3) будут $x = -1$, $y = -2$ и $x = 4$, $y = 3$.

Ответ: $\{(-1, -2); (4, 3)\}$.

Задача 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x-y} - 3^{y-x+2} = 8, \\ xy - x + y = 11. \end{cases} \quad (4)$$

Решение. Показательное уравнение¹

$$\begin{aligned} 3^{x-y} - 3^{y-x+2} = 8 &\Leftrightarrow 3^{x-y} - \frac{9}{3^{x-y}} - 8 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3^{2(x-y)} - 8 \cdot 3^{x-y} - 9 = 0 &\Leftrightarrow (3^{x-y} + 1)(3^{x-y} - 9) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3^{x-y} - 9 = 0 &\Leftrightarrow 3^{x-y} = 9 \Leftrightarrow x - y = 2. \end{aligned}$$

Тогда система (4) равносильна системе

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ xy - x + y = 118 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (-y) = 2, \\ x \cdot (-y) = -120. \end{cases}$$

В соответствии с обратной теоремой Виета x и $u = -y$, — решения приведённого квадратного уравнения

¹Если использовать равносильность

$$af(x) + \frac{b}{f(x)} = ac + \frac{b}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = c, \\ f(x) = \frac{b}{ac} \end{cases} \quad (abc \neq 0, b \neq ac^2)$$

при $a = 1$, $b = -9$, $c = -1$, то уравнение

$$3^{x-y} - \frac{9}{3^{x-y}} = -1 + 9 \Leftrightarrow 3^{x-y} = \frac{-9}{1 \cdot (-1)} \Leftrightarrow x - y = 2,$$

так как $3^{x-y} \neq -1$.

$$z^2 - 2z - 120 = 0 \iff (z + 10)(z - 12) = 0 \iff \begin{cases} z = -10, \\ z = 12. \end{cases}$$

Следовательно, решениями системы (4) будут

$$x = -10, y = -12 \quad \text{и} \quad x = 12, y = 10.$$

Ответ: $\{(-10, -12), (12, 10)\}$.

Задача 5. Решите систему показательных уравнений

$$\begin{cases} 3^{x-1} \cdot 5^{y-1} = 1, \\ 3^x + 5^y = 8. \end{cases} \quad (5)$$

Решение. Систему (5) с учётом, что

$$3^{x-1} \cdot 5^{y-1} = 15^{-1} \cdot 3^x \cdot 5^y,$$

приводим к равносильной системе показательных уравнений

$$\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 15, \\ 3^x + 5^y = 8. \end{cases}$$

Положив

$$3^x = u, \quad 5^y = v,$$

получим систему

$$\begin{cases} uv = 15, \\ u + v = 8. \end{cases}$$

По теореме Виета, u и v есть решения квадратного уравнения

$$z^2 - 8z + 15 = 0 \iff (z - 3)(z - 5) = 0 \iff \begin{cases} z = 3, \\ z = 5. \end{cases}$$

Если $u = 3$, то $v = 5$.

Если $u = 5$, то $v = 3$.

Тогда

$$\begin{cases} 3^x = 3, \\ 5^y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3^x = 5, \\ 5^y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \log_3 5, \\ y = \log_5 3. \end{cases}$$

Следовательно, решениями системы (5) будут

$$x = 1, y = 1 \text{ и } x = \log_3 5, y = \log_5 3.$$

Ответ: $\{(1, 1); (\log_3 5, \log_5 3)\}$.

Задача 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x-2} \cdot 3^{y-1} = 0,5, \\ 2^x + 3^y = 5. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1, 1), (\log_2 3, \log_3 2)\}$.

Задача 7. Множество решений системы

$$\begin{cases} 5^x + 6^y = 5, \\ 5^x \cdot 6^y = 6: \end{cases}$$

- 1) $\{(\log_2 5, \log_3 6), (\log_3 5, \log_2 6)\}$;
- 2) $\{(\log_5 2, \log_6 3), (\log_5 3, \log_2 6)\}$;
- 3) $\left\{\left(\frac{\ln 2}{\ln 5}, \frac{\ln 3}{\ln 2 + \ln 3}\right), \left(\frac{\lg 3}{\lg 5}, \frac{\lg 2}{\lg 2 + \lg 3}\right)\right\}$;
- 4) $\left\{\left(\ln 2 \ln 5, \frac{\ln 3}{\ln 2 + \ln 3}\right), \left(\ln 3 \ln 5, \frac{\ln 2}{\ln 2 + \ln 3}\right)\right\}$;
- 5) $\left\{\left(\frac{\lg 2}{\lg 5}, \frac{\lg 3}{\lg 2 - \lg 3}\right), \left(\frac{\lg 3}{\lg 5}, \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3}\right)\right\}$.

Ответ: 3).

Задача 8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 4^x - 2^x - 2 \cdot 5^y = 1, \\ 25^y + 3 \cdot 2^x - 4 \cdot 5^y = 3. \end{cases} \quad (6)$$

Решение. Подстановкой $2^x = u > 0$, $5^y = v > 0$ показательную систему (6) приводим к алгебраической системе

$$\begin{cases} 3u^2 - u - 2v = 1, \\ v^2 + 3u - 4v = 3. \end{cases} \quad (7)$$

Вычитая из второго уравнения системы (7) утроенное первое уравнение, получим равенство

$$v^2 - 9u^2 + 6u + 2v = 0 \iff (3u + v)(v - 3u + 2) = 0.$$

Отсюда, с учётом того, что $u > 0$, $v > 0$, устанавливаем:

$$v = 3u - 2.$$

Заменой $v = 3u - 2$ первое уравнение системы (7) приводим к квадратному уравнению

$$3u^2 - 7u + 3 = 0,$$

корнями которого являются положительные числа

$$u_1 = \frac{7 - \sqrt{13}}{6} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{7 + \sqrt{13}}{6}.$$

Из равенства $v = 3u - 2$ при $u = u_1$ получаем, что $v = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$

и является отрицательным числом, а при $u = u_2$ — $v = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} > 0$.

Итак, система (7) имеет одно решение $\left(\frac{7 + \sqrt{13}}{6}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)$ при $u > 0$, $v > 0$.

Следовательно, система (6) равносильна системе простейших показательных уравнений

$$\begin{cases} 2^x = \frac{7 + \sqrt{13}}{6}, \\ 5^y = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \log_2 \frac{7 + \sqrt{13}}{6}, \\ y = \log_5 \frac{3 + \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\log_2 \frac{7 + \sqrt{13}}{6}, \log_5 \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right) \right\}.$$

Задача 9. Решите систему показательных уравнений

$$\begin{cases} 3^{x-1} \cdot 5^{y-1} = 5, \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases} \quad (8)$$

Решение. Система (8) равносильна системе

$$\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases} \quad (9)$$

Способ 1. Перемножив почленно уравнения системы (9), получим уравнение

$$3^{x+y} \cdot 5^{x+y} = 5^3 \cdot 3^3 \iff 15^{x+y} = 15^3 \iff x + y = 3.$$

Разделив почленно первое уравнение системы (9) на второе уравнение, получим уравнение

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^y = \frac{5}{3} \iff \left(\frac{5}{3}\right)^{y-x} = \frac{5}{3} \iff y - x = 1.$$

Следовательно, система (8) равносильна линейной системе

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ y - x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 2, \\ 2y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Способ 2. Перемножив почленно уравнения системы (9), получим уравнение

$$3^{x+y} \cdot 5^{x+y} = 5^3 \cdot 3^3 \iff 15^{x+y} = 15^3 \iff x + y = 3 \iff y = -x + 3.$$

Подставим $y = -x + 3$ в первое уравнение системы (9):

$$3^x \cdot 5^{-x+3} = 75 \iff \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{3}{5} \iff x = 1.$$

Если $x = 1$, то $y = 2$.

Способ 3. Разделив почленно первое уравнение системы (9) на второе уравнение, получим уравнение

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^y = \frac{5}{3} \iff \left(\frac{5}{3}\right)^{y-x} = \frac{5}{3} \iff y - x = 1 \iff y = x + 1.$$

Подставим $y = x + 1$ во второе уравнение системы (9):

$$3^{x+1} \cdot 5^x = 45 \iff 15^x = 15 \iff x = 1.$$

Если $x = 1$, то $y = 2$.

Способ 4. Прологарифмировав каждое уравнение системы (9), получим равносильную линейную систему

$$\begin{cases} x \ln 3 + y \ln 5 = \ln 3 + 2 \ln 5, \\ x \ln 5 + y \ln 3 = 2 \ln 3 + \ln 5. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на $\ln 3$, а второе на $-\ln 5$, а затем, сложив почленно полученные равенства, устанавливаем, что

$$x(\ln^2 3 - \ln^2 5) = \ln^2 3 - \ln^2 5 \iff x = 1.$$

Умножив первое уравнение на $\ln 5$, а второе на $-\ln 3$, и сложив почленно полученные равенства, устанавливаем, что

$$y(\ln^2 5 - \ln^2 3) = 2(\ln^2 5 - \ln^2 3) \iff y = 2.$$

Ответ: $\{(1, 2)\}$.

Задача 10. Решите систему

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12. \end{cases} \quad (10)$$

Решение. Способ 1. Прологарифмировав каждое уравнение системы (10), получим равносильную линейную систему

$$\begin{cases} x \ln 2 + y \ln 3 = \ln 2 + \ln 3, \\ x \ln 3 + 2y \ln 2 = 2 \ln 2 + \ln 3. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на $2 \ln 2$, а второе на $-\ln 3$, а затем, сложив почленно полученные равенства, устанавливаем, что

$$x(2 \ln^2 2 - \ln^2 3) = 2 \ln^2 2 - \ln^2 3 \iff x = 1.$$

Умножив первое уравнение на $\ln 3$, а второе на $-\ln 2$, а затем, сложив почленно полученные равенства, устанавливаем, что

$$y(\ln^2 3 - 2 \ln^2 2) = \ln^2 3 - 2 \ln^2 2 \iff y = 1.$$

Способ 2. Почленным делением первого уравнения системы (10) на 6, а второго уравнения на 12, получим равносильную систему

$$\begin{cases} 2^{x-1} \cdot 3^{y-1} = 1, \\ 3^{x-1} \cdot 4^{y-1} = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Почленным логарифмированием первого уравнения системы (11) по основанию 2, а второго уравнения по основанию 3, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x - 1 + (y - 1) \log_2 3 = 0, \\ x - 1 + (y - 1) \log_3 4 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Из системы (12) следует, что

$$(y - 1) \log_2 3 = (y - 1) \log_3 4 \iff (y - 1)(\log_2 3 - \log_3 4) = 0,$$

а значит, $y = 1$.

При $y = 1$ из системы (12) находим, что $x = 1$.

Системы (10) и (12) равносильны. Поэтому решением системы (10) будет $(1, 1)$.

Ответ: $\{(1, 1)\}$.

Задача 11. Решите систему показательных уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases}$$

Ответ: $\{(3, 1)\}$.

Задача 12. Если (x_0, y_0) — решение системы

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18, \end{cases}$$

то выражение $3x_0 - y_0$ равно:

1) 4; 2) 5; 3) 7; 4) 6; 5) 8.

Ответ; 2).

Задача 13. Решите систему

$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases} \quad (13)$$

Решение. Первое уравнение системы (13) равносильно уравнению

$$\log_y x + \frac{1}{\log_y x} = 2. \quad (14)$$

Так как сумма взаимно обратных чисел не превосходит двух, а равна двум, когда эти числа равны единице, то из уравнения (14) следует, что

$$\log_y x = 1 \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y = x. \end{cases}$$

Пусть $y = x$. Тогда из второго уравнения системы (13) получаем:

$$x^2 - x - 20 = 0 \iff (x + 4)(x - 5) = 0.$$

Следовательно, система (13) имеет одно решение $x = y = 5$.

Ответ: $\{(5, 5)\}$.

Задача 14. Решите систему

$$\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64. \end{cases} \quad (15)$$

Решение. Первое уравнение системы (15) равносильно уравнению¹

¹Уравнение решается с помощью равносильности

$$\log_y x + \frac{1}{\log_y x} = 5 + \frac{1}{5} \iff \begin{cases} \log_y x = 5, \\ \log_y x = \frac{1}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} \log_y x = 5, \\ \log_x y = 5. \end{cases}$$

Поэтому система (15) равносильна совокупности двух систем.

Первая система

$$\begin{cases} \log_y x = 5, \\ xy = 64 \end{cases} \iff \begin{cases} y > 0, \\ y \neq 1, \\ x = y^5, \\ y^6 = 64 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2, \\ x = 32. \end{cases}$$

Вторая система¹

$$\begin{cases} \log_x y = 5, \\ xy = 64 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y = x^5, \\ x^6 = 64 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2, \\ y = 32. \end{cases}$$

Итак, $(2, 32)$ и $(32, 2)$ — решения системы (15).

Ответ: $\{(2, 32), (32, 2)\}$.

Задача 15. Решите систему

$$\begin{cases} 3(\log_y x - \log_x y) = 8, \\ xy = 16. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0,25; 64), (8, 2)\}$.

¹ В систему (15) неизвестные x и y входят циклично: если заменить x на y и y на x , то система (15) не изменится.

При этом решения второй системы могут быть получены циклической заменой из решений первой системы.

Упорядоченная пара $(32, 2)$ — решение первой системы. Следовательно, упорядоченная пара $(2, 32)$ — решение второй системы.

Задача 16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(u+v) - \log_3(u-v) = 1, \\ u^2 - v^2 = 2. \end{cases} \quad (16)$$

Решение. Учитывая, что система (16) имеет смысл при $u+v > 0$ и $u-v > 0$, почленным логарифмированием по основанию 2 второго уравнения получим равносильную систему

$$\begin{cases} \log_2(u+v) - \log_3(u-v) = 1, \\ \log_2(u+v) + \log_2(u-v) = 1. \end{cases} \quad (17)$$

Из системы (17) следует равенство

$$\log_2(u-v) = \log_3(u-v),$$

которое имеет место в единственном случае, когда $u-v=1$, так как графики логарифмических функций от одного и того же аргумента с разными основаниями пересекаются только в одной точке $(1, 0)$.

Тогда система (17), а значит, и система (16), равносильна системе

$$\begin{cases} u-v=1, \\ \log_2(u+v)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} u-v=1, \\ u+v=2 \end{cases} \iff \begin{cases} u=1,5, \\ v=0,5. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1,5; 0,5)\}$.

Задача 17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt{x+y} + \log_2(x-y) = 7, \\ 3 - \sqrt{x+y} = 2\log_2 \sqrt{x-y}. \end{cases} \quad (18)$$

Решение. Система (18) равносильна системе

$$\begin{cases} 3\sqrt{x+y} + \log_2(x-y) = 7, \\ 3 - \sqrt{x+y} = \log_2(x-y). \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{x+y} = u$, $\log_2(x-y) = v$. Тогда

$$\begin{cases} 3u + v = 7, \\ u + v = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2u = 7 - 3, \\ -2v = 7 - 3 \cdot 3 \end{cases} \iff \begin{cases} u = 2, \\ v = 1. \end{cases}$$

Следовательно, система (18) равносильна системе

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 2, \\ \log_2(x-y) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y = 4, \\ x-y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(3, 1)\}$.

Задача 18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x-2y} + \log_2(x-y) = 2, \\ 6 \log_2 \sqrt{x-y} = 2^{x-2y} + 2. \end{cases}$$

Ответ: $\{(4, 2)\}$.

Задача 19. Решите систему

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases} \quad (19)$$

*Решение*¹. Второе уравнение системы (19) равносильно уравнению

$$y - x = (\sqrt{2})^4 \iff y = x + 4.$$

Подставим $y = x + 4$ в первое уравнение системы (19):

$$3^x \cdot 2^{x+4} = 576 \iff 6^x = 36 \iff x = 2.$$

Если $x = 2$, то $y = 6$.

Ответ: $\{(2, 6)\}$.

Задача 20. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 108, \\ \log_{\sqrt{12}}(x-y) = 2. \end{cases} \quad (20)$$

¹ Можно решить способом, использованным при решении задачи 20.

*Решение*¹. Прологарифмировав первое уравнение и пропотенцировав второе уравнение системы (20), получим равносильную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x \ln 3 + y \ln 4 = \ln(2^2 \cdot 3^3), \\ (\sqrt{12})^{\log_{\sqrt{12}}(x-y)} = (\sqrt{12})^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \ln 3 + 2y \ln 2 = 2 \ln 2 + 3 \ln 3, \\ x - y = 12. \end{cases} \quad (21)$$

Умножив второе уравнение системы (21) на $2 \ln 2$ и сложив почленно полученное уравнение с первым уравнением системы (21), устанавливаем, что

$$x(\ln 3 + 2 \ln 2) = 26 \ln 2 + 3 \ln 3 \iff x = \frac{26 \ln 2 + 3 \ln 3}{2 \ln 2 + \ln 3}.$$

Умножив второе уравнение системы (21) на $-\ln 3$ и сложив почленно полученное уравнение с первым уравнением системы (21), устанавливаем, что

$$y(2 \ln 2 + \ln 3) = 2 \ln 2 - 9 \ln 3 \iff y = \frac{2 \ln 2 - 9 \ln 3}{2 \ln 2 + \ln 3}.$$

Следовательно, множество решений системы (20) состоит из одной упорядоченной пары $\left(\frac{26 \ln 2 + 3 \ln 3}{2 \ln 2 + \ln 3}, \frac{2 \ln 2 - 9 \ln 3}{2 \ln 2 + \ln 3} \right)$.

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{26 \ln 2 + 3 \ln 3}{2 \ln 2 + \ln 3}, \frac{2 \ln 2 - 9 \ln 3}{2 \ln 2 + \ln 3} \right) \right\}.$$

Задача 21. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(4x - y) = -1, \\ 9^{2x+2} \cdot 3^{2y} = 1. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \left\{ \left(-\frac{1}{4}, -1\frac{1}{2} \right) \right\}.$$

¹ Можно решить способом, использованным при решении задачи 19.

Задача 22. Решите систему

$$\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5. \end{cases} \quad (22)$$

Решение. Первое уравнение системы (22) равносильно уравнению

$$10 \cdot 10^{\lg(x+y)} = 50 \iff x+y = 5.$$

Второе уравнение системы (22) равносильно системе

$$\begin{cases} x-y > 0, \\ x+y > 0, \\ \lg((x-y)(x+y)) = \lg 20 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y > 0, \\ x+y > 0, \\ (x-y)(x+y) = 20. \end{cases}$$

Следовательно, система (22) равносильна системе

$$\begin{cases} x-y > 0, \\ x+y = 5, \\ (x-y)(x+y) = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y = 5, \\ x-y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4,5, \\ y = 0,5. \end{cases}$$

Ответ: $\{(4,5, 0,5)\}$.**Задача 23.** Решите систему

$$\begin{cases} 8^{\log_9(x-4y)} = 1, \\ 4^{x-2y} - 7 \cdot 2^{x-2y} = 8. \end{cases} \quad (23)$$

Решение. Система (23) равносильна системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} \log_9(x-4y) = 0, \\ (2^{x-2y})^2 - 7 \cdot 2^{x-2y} - 8 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x-4y = 1, \\ (2^{x-2y} + 1)(2^{x-2y} - 8) = 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} x-4y = 1, \\ 2^{x-2y} = 2^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x-4y = 1, \\ x-2y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5, \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\{(5, 1)\}$.

Задача 24. Решите систему

$$\begin{cases} 8 \cdot (\sqrt{2})^{x-y} = 0,5^{y-3}, \\ \log_3(x-2y) + \log_3(3x+2y) = 3. \end{cases} \quad (24)$$

Решение. Первое уравнение системы (24) равносильно уравнению

$$2^3 \cdot 2^{\frac{x-y}{2}} = 2^{-y} \cdot 2^3 \iff 2^{\frac{x-y}{2}} = 2^{-y} \iff \frac{x-y}{2} = -y \iff y = -x.$$

При $y = -x$ из второго уравнения системы (24) получаем:

$$\begin{aligned} \log_3 3x + \log_3 x = 3 &\iff 1 + \log_3 x + \log_3 x = 3 \iff \\ &\iff \log_3 x = 1 \iff x = 3. \end{aligned}$$

Итак, решением системы (24) будет $x = 3$, $y = -3$.*Ответ:* $\{(3, -3)\}$.**Задача 25.** Решите систему

$$\begin{cases} 4^{x+y} = 2^{y-x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 - 5. \end{cases}$$

Ответ: $\{(0,5), (-1,5)\}$.**Задача 26.** Решите систему

$$\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(y+x)^2 - \lg x = 2 \lg 3. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1, 2), (16, -28)\}$.**Задача 27.** Решите систему

$$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 3. \end{cases} \quad (25)$$

Решение. Способ 1. Система (25) равносильна системе

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 3^4, \\ \lg \sqrt{xy} = \lg 30 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 30 \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} \sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 4, \\ \sqrt{x}(2\sqrt{x} - 4) = 30 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 4, \\ (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} - 15 = 0 \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 5) = 0, \\ \sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x} = 5, \\ \sqrt{y} = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 25, \\ y = 36. \end{cases} \end{aligned}$$

Способ 2. Система (25) равносильна системе

$$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 3^4, \\ \lg \sqrt{xy} = \lg 30 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 30, \end{cases}$$

которую запишем в виде

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + (-\sqrt{y}) = 4, \\ (2\sqrt{x}) \cdot (-\sqrt{y}) = -60. \end{cases}$$

Тогда, по обратной теореме Виета,

$$u = 2\sqrt{x} \quad \text{и} \quad v = -\sqrt{y}$$

являются корнями приведённого квадратного уравнения

$$z^2 - 4z - 60 = 0 \iff (z + 6)(z - 10) = 0 \iff \begin{cases} z = -6, \\ z = 10. \end{cases}$$

Так как $u = 2\sqrt{x} > 0$, то $u \neq -6$.

Значит, $u = 10$, $v = -6$:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} = 10 & \iff \sqrt{x} = 5 \iff x = 25; \\ -\sqrt{y} = -6 & \iff \sqrt{y} = 6 \iff y = 36. \end{aligned}$$

Ответ: $\{(25, 36)\}$.

Задача 28. Решите систему логарифмических уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ \log_2 xy = 3. \end{cases} \quad (26)$$

Решение. Система (26) равносильна системе

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ \log_2 x + \log_2 y = 3, \end{cases}$$

из которой почленным сложением и вычитанием (из второго уравнения первого) получаем систему, равносильную системе (26):

$$\begin{cases} 2 \log_2 x = 4, \\ 2 \log_2 y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \log_2 x = 2, \\ \log_2 y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\{(4, 2)\}$.

Задача 29. Решите систему

$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2 - \lg 5, \\ \lg(x + y) + \lg(x - y) = \lg 12 + 1. \end{cases} \quad (27)$$

Решение. Так как $2 - \lg 5 = \lg 20$, то первое уравнение системы (27) равносильно уравнению

$$\lg(x^2 + y^2) = \lg 20 \iff x^2 + y^2 = 20.$$

Второе уравнение системы (27) равносильно уравнению

$$\lg(x + y) + \lg(x - y) = \lg 12 \iff \begin{cases} x - y > 0, \\ x + y > 0, \\ x^2 - y^2 = 12. \end{cases}$$

Система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 16, \\ y^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = 4, \\ |y| = 2. \end{cases}$$

Стало быть, решениями системы (27) являются такие упорядоченные пары (x, y) , что

$$|x| = 4, \quad |y| = 2, \quad x - y > 0, \quad x + y > 0.$$

Отсюда находим решения системы (27): $(4, -2)$ и $(4, 2)$.

Ответ: $\{(4, -2), (4, 2)\}$.

Задача 30. Решите систему

$$\begin{cases} \ln(x^2 + y^2) = 2(\ln 2 + \ln \sqrt{5}), \\ \ln(x + y) + \ln(x - y) = 2 \ln 2 + \ln 3. \end{cases}$$

Ответ: $\{(4, -2), (4, 2)\}$.

Задача 31. Решите систему логарифмических уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + 2 \log_4 y = 3, \\ 3 \log_8(x + 1) - \log_2(y - 1) = \log_{\frac{1}{2}} 3. \end{cases} \quad (28)$$

Решение. Система (28) имеет смысл, когда $x > 0$, $y > 1$. При этом сумма

$$\log_2 x + 2 \log_4 y = \log_2 x + 2 \log_{2^2} y = \log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy,$$

а разность

$$\begin{aligned} 3 \log_8(x + 1) - \log_2(y - 1) &= 3 \log_{2^3}(x + 1) - \log_2(y - 1) = \\ &= \log_2(x + 1) - \log_2(y - 1) = \log_2 \frac{x + 1}{y - 1}. \end{aligned}$$

Таким образом, система (28) равносильна системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 1, \\ \log_2 xy = 3, \\ \log_2 \frac{x + 1}{y - 1} = \log_2 \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ y > 1, \\ xy = 8, \\ \frac{x + 1}{y - 1} = \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ y > 1, \\ y = 3x + 4, \\ 3x^2 + 4x - 8 = 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения

$$3x^2 + 4x - 8 = 0$$

являются

$$-\frac{2(1+\sqrt{7})}{3} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{2(\sqrt{7}-1)}{3} > 0.$$

При этом

$$y = 3 \cdot \frac{2(\sqrt{7}-1)}{3} + 4 = 2(1+\sqrt{7}) > 1.$$

Следовательно, множество решений системы (28) состоит из одной упорядоченной пары $\left(\frac{2(\sqrt{7}-1)}{3}, 2(1+\sqrt{7})\right)$.

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{2(\sqrt{7}-1)}{3}, 2(1+\sqrt{7}) \right) \right\}.$$

Задача 32. Решите систему

$$\begin{cases} \lg(x+y) - \lg 5 = \lg x + \lg y - \lg 6, \\ \frac{\lg x}{\lg(y+6) - (\lg y + \lg 6)} = -1. \end{cases} \quad (29)$$

Решение. Первое уравнение системы (29) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \lg(x+y) + \lg 6 &= \lg x + \lg y + \lg 5 \iff \\ \iff \lg(6(x+y)) &= \lg(5xy) \iff 6(x+y) = 5xy \end{aligned}$$

при $x > 0, y > 0$.

Второе уравнение системы (29) равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\lg x}{\lg(y+6) - \lg 6y} + 1 &= 0 \iff \frac{\lg x + \lg(y+6) - \lg 6y}{\lg(y+6) - \lg 6y} = 0 \iff \\ \iff \begin{cases} \lg x + \lg(y+6) &= \lg 6y, \\ \lg(y+6) &\neq \lg 6y \end{cases} &\iff \begin{cases} x(y+6) &= 6y, \\ y+6 &\neq 6y \end{cases} \end{aligned}$$

при $x > 0, y > 0$.

Следовательно, система (29) равносильна системе

$$\begin{cases} 6(x+y) = 5xy, \\ x(y+6) = 6y \end{cases} \iff \begin{cases} 6(x+y) = 5xy, \\ 6(x-y) = -xy \end{cases} \quad (30)$$

при $x > 0$, $y > 0$, $5y \neq 6$.

Сложив уравнения системы (30), получим:

$$12x = 4xy \iff x(3-y) = 0.$$

Так как $x > 0$, то $y = 3$.

Если $y = 3$, то из системы (30) получаем, что $x = 2$.

Ответ: $\{(2, 3)\}$.

Задача 33. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{x}} xy = 8, \\ \log_3 \log_{\frac{1}{9}} \frac{x}{y} = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Решение. Система (31) равносильна системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ xy = x^4, \\ \log_{\frac{1}{9}} \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y = x^3, \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y = x^3, \\ 9x = x^3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 3, \\ y = x^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3, \\ y = 27. \end{cases}$$

Ответ: $\{(3, 27)\}$.

Задача 34. Решите систему логарифмических уравнений

$$\begin{cases} \log_{xy} \frac{y}{x} - \log_y^2 x = 1, \\ \log_2(y-x) = 1. \end{cases} \quad (32)$$

Решение. Логарифмическое уравнение

$$\begin{aligned}
 \log_{xy} \frac{y}{x} - \log_y^2 x = 1 &\iff \frac{\log_y \frac{y}{x}}{\log_y xy} - \log_y^2 x = 1 \iff \\
 \iff \frac{1 - \log_y x}{1 + \log_y x} - \log_y^2 x - 1 = 0 &\iff \begin{cases} 1 + \log_y x \neq 0, \\ \log_y^3 x + \log_y^2 x + 2\log_y x = 0 \end{cases} \iff \\
 \iff \begin{cases} 1 + \log_y x \neq 0, \\ \log_y x (\log_y^2 x + \log_y x + 2) = 0 \end{cases} &\iff \log_y x = 0 \iff \begin{cases} x = 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Из второго уравнения системы (32) при $x = 1$ получаем, что логарифм $\log_2(y - 1) = 1$, то есть, $y = 3$.

Поскольку $3 \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$, то решением системы (32) будет $x = 1, y = 3$.

Ответ: $\{(1, 3)\}$.

Задача 35. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{x+3}(0,5 - y) + \log_{y+1}(3x + 8) = 1, \\ \log_{x+3}(xy + x + 3y + 3) + 0,5 \log_{y+1}(x^2 + 6x + 9) = 3. \end{cases} \quad (33)$$

Решение. Уравнение

$$\begin{aligned}
 \log_{x+3}(xy + x + 3y + 3) + 0,5 \log_{y+1}(x^2 + 6x + 9) = 3 &\iff \\
 \iff \log_{x+3}((x + 3)(y + 1)) + \frac{1}{2} \log_{y+1}(x + 3)^2 = 3 &\iff \\
 \iff \log_{x+3}(x + 3) + \log_{x+3}(y + 1) + \log_{y+1}(x + 3) = 3 &\iff \\
 \iff \log_{x+3}(y + 1) + \log_{y+1}(x + 3) - 2 = 0 &\iff \\
 \iff \frac{1}{\log_{y+1}(x + 3)} + \log_{y+1}(x + 3) - 2 = 0 &\iff
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \neq 1, \\ \log_{y+1}^2(x + 3) - 2 \log_{y+1}(x + 3) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_{y+1}(x + 3) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \log_{y+1}(x + 3) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 > 0, \\ y + 1 \neq 1, \\ x + 3 = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -1, \\ y \neq 0, \\ x = y - 2. \end{cases}$$

При $x = y - 2$ первое уравнение системы (33) будет иметь вид

$$\log_{y+1}(0,5 - y) + \log_{y+1}(3y + 2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 - y > 0, \\ 3y + 2 > 0, \\ \log_{y+1}((0,5 - y)(3y + 2)) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 - y > 0, \\ 3y + 2 > 0, \\ y + 1 > 0, \\ y + 1 \neq 1, \\ (0,5 - y)(3y + 2) = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0,5, \\ y > -\frac{2}{3}, \\ y > -1, \\ y \neq 0, \\ y(2y + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

Из $x = y - 2$ при $y = -0,5$ находим, что $x = -2,5$.

Ответ: $\{(-2,5; -0,5)\}$.

Задача 36. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{x+1}(2y + 1) + \log_{1-y}(2x + 1) = 2, \\ \log_{x+1}(y^2 - 2y + 1) + \log_{1-y}(x^2 + 2x + 1) = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)\right\}$.

Задача 37. Решите систему

$$\begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ x^y = 4^6. \end{cases} \quad (34)$$

Решение. Способ 1. Система (34) равносильна системе

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ \log_4 x^y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ y \log_4 x = 6 \end{cases} \iff \\ \iff & \begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ \log_4^2 x + \log_4 x - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ (\log_4 x + 3)(\log_4 x - 2) = 0 \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} \log_4 x = -3, \\ y = -2, \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{64}, \\ y = -2, \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \log_4 x = 2, \\ y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 16, \\ y = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Способ 2. Система (34) равносильна системе

$$\begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ \log_4 x^y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ y \log_4 x = 6, \end{cases}$$

которую запишем в виде

$$\begin{cases} y + (-\log_4 x) = 1, \\ y \cdot (-\log_4 x) = -6. \end{cases}$$

По обратной теореме Виета, y и $u = -\log_4 x$ являются корнями приведённого квадратного уравнения

$$z^2 - z - 6 = 0 \iff (z + 2)(z - 3) = 0 \iff \begin{cases} z = -2, \\ z = 3. \end{cases}$$

Пусть $y = -2$. Тогда $u = 3$:

$$-\log_4 x = 3 \iff \log_4 x = -3 \iff x = 4^{-3}.$$

Пусть $y = 3$. Тогда $u = -2$:

$$-\log_4 x = -2 \iff \log_4 x = 2 \iff x = 16.$$

Следовательно, решениями системы (34) будут

$$x = \frac{1}{64}, y = -2 \quad \text{и} \quad x = 16, y = 3.$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{64}, -2\right), (16, 3)\right\}$.

Задача 38. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{81}, -3\right), (27, 4)\right\}$.

Задача 39. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^{\frac{1}{x}} = 2, \\ y^x = 16. \end{cases} \quad (35)$$

Решение. Способ 1. Возведём первое уравнение системы (35) в степень x . Получим при $x \neq 0$, что

$$y = 2^x.$$

Тогда из второго уравнения системы (35) получаем:

$$2^{x^2} = 16 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

Если $x = -2$, то $y = 0,25$. Если $x = 2$, то $y = 4$.

Следовательно, решениями системы (35) будут

$$x = -2, y = 0,25 \quad \text{и} \quad x = 2, y = 4.$$

Способ 2. Почленным логарифмированием по основанию e обоих показательных уравнений системы (35) получаем равносильную систему логарифмических уравнений

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} \ln y = \ln 2, \\ x \ln y = \ln 16 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{x \ln y}{x^2} = \ln 2, \\ x \ln y = 4 \ln 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \ln y = 4 \ln 2, \\ \frac{4 \ln 2}{x^2} = \ln 2 \end{array} \right. \iff \\
& \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 4, \\ x \ln y = 4 \ln 2 \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = -2, \\ \ln y = \ln 2^{-2}, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 2, \\ \ln y = \ln 2^2 \end{array} \right. \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = -2, \\ y = 0,25, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 2, \\ y = 4. \end{array} \right. \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Ответ: $\{(-2, 0,25), (2, 4)\}$.

Задача 40. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\lg y} = 100, \\ \log_y x = 2. \end{cases} \quad (36)$$

Решение. Система (36) равносильна системе

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} \lg y \lg x = 2, \\ \frac{\lg x}{\lg y} = 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \lg x \lg y = 2, \\ \lg x = 2 \lg y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \lg x = 2 \lg y, \\ \lg^2 y = 1 \end{array} \right. \iff \\
& \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \lg y = -1, \\ \lg x = -2, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \lg y = 1, \\ \lg x = 2 \end{array} \right. \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} y = 0,1, \\ x = 0,01, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} y = 10, \\ x = 100. \end{array} \right. \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Ответ: $\{(0,01, 0,1), (100, 10)\}$.

Задача 41. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{2y} = 16 + 6 \cdot x^y, \\ x^{2y} + 5 = y \cdot x^y + 5y^2. \end{cases} \quad (37)$$

Решение. Из первого уравнения системы (37) находим:

$$x^{2y} = 16 + 6 \cdot x^y \iff (x^y + 2)(x^y - 8) = 0 \iff x^y = 8.$$

Тогда система (37) равносильна системе

$$\begin{cases} x^y = 8, \\ 5y^2 + 8y - 69 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (5y + 23)(y - 3) = 0, \\ x^y = 8. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $x = \frac{23\sqrt[23]{256}}{2}$ при $y = -4\frac{3}{5}$, а также, что $x = 2$ при $y = 3$.

Ответ: $\left\{ \left(\frac{23\sqrt[23]{256}}{2}, -4\frac{3}{5} \right), (2, 3) \right\}$.

Задача 42. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^{1-0,2\log_x y} = x^{\frac{4}{5}}, \\ 2 + \log_x \left(1 - \frac{3y}{x^2} \right) = \log_x 4. \end{cases} \quad (38)$$

Решение. Прологарифмировав по основанию x первое уравнение системы (38), получим, что

$$(1 - 0,2\log_x y) \log_x y = \log_x x^{\frac{4}{5}} \iff \log_x y - \frac{1}{5} \log_x^2 y = \frac{4}{5} \iff$$

$$\iff \log_x^2 y - 5\log_x y + 4 = 0 \iff$$

$$\iff (\log_x y - 1)(\log_x y - 4) = 0 \iff \begin{cases} \log_x y = 1, \\ \log_x y = 4. \end{cases}$$

Второе уравнение системы (38) равносильно уравнению

$$\log_x x^2 + \log_x \left(1 - \frac{3y}{x^2} \right) = \log_x 4 \iff$$

$$\iff \log_x (x^2 - 3y) = \log_x 4 \iff x^2 - 3y = 4$$

при $x > 0, x \neq 1$.

Стало быть, система (38) равносильна совокупности двух систем.

Первая система

$$\begin{cases} \log_x y = 1, \\ x^2 - 3y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y = x, \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y = x, \\ (x+1)(x-4) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4, \\ y = 4. \end{cases}$$

Вторая система

$$\begin{cases} \log_x y = 4, \\ x^2 - 3y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y = x^4, \\ 3x^4 - x^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

не имеет решений, так как квадратное относительно x^2 уравнение $3(x^2)^2 - x^2 + 4 = 0$ не имеет корней, ибо у него отрицательный дискриминант $D = 1 - 48 = -47$.

Ответ: $\{(4, 4)\}$.

Задача 43. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y) \cdot 2^{y-2x} = 6,25, \\ (x+y)^{\frac{1}{2x-y}} = 5. \end{cases} \quad (39)$$

Решение. Способ 1. Почленным логарифмированием по основанию 10 показательного и показательного-степенного уравнений системы (39) получаем равносильную систему логарифмических уравнений

$$\begin{cases} \lg((x+y) \cdot 2^{y-2x}) = \lg(2,5)^2, \\ \lg(x+y)^{\frac{1}{2x-y}} = \lg 5 \end{cases} \iff$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x+y) + (y-2x) \lg 2 = 2(\lg 5 - \lg 2), \\ \frac{\lg(x+y)}{2x-y} = \lg 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y \neq 0, \\ \lg(x+y) + (y-2x) \lg 2 = 2(\lg 5 - \lg 2), \\ \lg(x+y) = (2x-y) \lg 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x+y) + (y-2x) \lg 2 = 2(\lg 5 - \lg 2), \\ \lg(x+y) + (y-2x) \lg 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (\lg 2 - \lg 5)(y-2x) = 2(\lg 5 - \lg 2), \\ (\lg 5 - \lg 2) \lg(x+y) = 2(\lg 5 - \lg 2) \lg 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y-2x = -2, \\ \lg(x+y) = \lg 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x = -2, \\ x+y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ y = 16. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Способ 2. Первое уравнение системы (39) равносильно уравнению

$$x + y = \frac{25}{4} \cdot 2^{2x-y}. \quad (40)$$

При этом второе уравнение системы (39) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2x-y}} \cdot 2 = 5 &\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{2x-y}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{2}{2x-y} = 1 &\Leftrightarrow 2x-y = 2.
 \end{aligned}$$

Тогда из уравнения (40) получаем:

$$x + y = \frac{25}{4} \cdot 4 \Leftrightarrow x + y = 25.$$

Стало быть, система (39) равносильна системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 2, \\ x + y = 25 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = 2 + 25, \\ 3y = 50 - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 9, \\ y = 16. \end{cases}$$

Ответ: $\{(9, 16)\}$.

Задача 44. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\frac{x+2y}{4}} = y^4, \\ y^{\frac{x+2y}{2}} = x^2 \end{cases} \quad (41)$$

при $x > 0, y > 0$.

Решение. Способ 1. При $x = 1$ система (41) будет иметь вид

$$\begin{cases} 1^{\frac{1+2y}{4}} = y^4, \\ y^{\frac{1+2y}{2}} = 1 \end{cases} \iff y = 1.$$

Следовательно, $x = y = 1$ — решение системы.

Пусть $x \neq 1$. Прологарифмировав по основанию x оба уравнения системы (41), будем иметь¹, что

¹ Систему (42) запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{x+2y}{4} + (-4 \log_x y) = 0, \\ \frac{x+2y}{4} \cdot (-4 \log_x y) = -4. \end{cases}$$

По обратной теореме Виета, $u = \frac{x+2y}{4} > 0$ и $v = -4 \log_x y$ являются корнями приведённого квадратного уравнения

$$z^2 - 4 = 0 \iff z = \pm 2.$$

Так как $u > 0$, то $u = 2$, а $v = -2$.

Следовательно, система (42) равносильна системе

$$\begin{cases} \frac{x+2y}{4} = 4 \log_x y, \\ \frac{x+2y}{2} \log_x y = 2. \end{cases} \quad (42)$$

Первое уравнение системы (42) запишем в виде

$$\log_x y = \frac{x+2y}{16}.$$

Тогда из второго уравнения системы (42) при $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$ получаем, что

$$\frac{(x+2y)^2}{32} = 2 \iff (x+2y)^2 = 64 \iff |x+2y| = 8.$$

Следовательно, система (42), а вместе с ней и система (41) при $x \neq 1$, равносильна системе

$$\begin{cases} x+2y=8, \\ \log_x y = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y>0, \\ x+2y=8, \\ \log_x y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y>0, \\ x \neq 1, \\ x=y^2, \\ y^2+2y-8=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y>0, \\ x \neq 1, \\ x=y^2, \\ (y+4)(y-2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=2, \\ x=4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+2y}{4} = 2, \\ -4 \log_x y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} y>0, \\ x+2y=8, \\ \log_x y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y>0, \\ x \neq 1, \\ x=y^2, \\ y^2+2y-8=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y>0, \\ x \neq 1, \\ x=y^2, \\ (y+4)(y-2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=2, \\ x=4. \end{cases}$$

Способ 2. Перемножим почленно уравнения системы (41) и разделим почленно первое уравнение системы (41) на второе. В результате при $y > 0$ получим равносильную систему

$$\begin{cases} (xy^2)^{\frac{x+2y}{4}} = (xy^2)^2, \\ \left(\frac{x}{y^2}\right)^{\frac{x+2y}{4}} = \left(\frac{x}{y^2}\right)^{-2}. \end{cases} \quad (43)$$

Относительно системы (43) рассмотрим четыре случая:

$$xy^2 \neq 1, \frac{x}{y^2} \neq 1; \quad xy^2 = 1, \frac{x}{y^2} = 1;$$

$$xy^2 \neq 1, \frac{x}{y^2} = 1; \quad xy^2 = 1, \frac{x}{y^2} \neq 1.$$

Случай 1. Если $xy^2 \neq 1, \frac{x}{y^2} \neq 1$, то система (43) равносильна при $x > 0, y > 0$ системе

$$\begin{cases} \frac{x+2y}{4} = 2, \\ \frac{x+2y}{4} = -2, \end{cases}$$

которая несовместна.

Случай 2. Система

$$\begin{cases} xy^2 = 1, \\ \frac{x}{y^2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^2, \\ y^4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |y| = 1, \\ x = 1. \end{cases}$$

Стало быть, $x = y = 1$ — решение системы (41), так как $y > 0$.

Случай 3. Если

$$\begin{cases} xy^2 \neq 1, \\ \frac{x}{y^2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^2, \\ y^4 \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^2, \\ |y| \neq 1, \end{cases}$$

то система (41) равносильна системе

$$\begin{cases} y > 0, \\ y \neq 1, \\ x = y^2, \\ (y^4)^{\frac{y^2+2y}{4}} = y^8 \end{cases} \iff \begin{cases} y > 0, \\ y \neq 1, \\ x = y^2, \\ y^2 + 2y - 8 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y > 0, \\ x = y^2, \\ (y+4)(y-2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2, \\ x = 4. \end{cases}$$

Случай 4. Если

$$\begin{cases} xy^2 = 1, \\ \frac{x}{y^2} \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{y^2}, \\ \frac{1}{y^2} \neq y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} |y| \neq 1, \\ x = \frac{1}{y^2}, \end{cases}$$

то система (41) равносильна системе

$$\begin{cases} y > 0, \\ y \neq 1, \\ x = \frac{1}{y^2}, \\ \left(\frac{1}{y^4}\right)^{\frac{1+2y^3}{4y^2}} = \left(\frac{1}{y^4}\right)^{-2} \end{cases} \iff \begin{cases} y > 0, \\ y \neq 1, \\ x = \frac{1}{y^2}, \\ \frac{1+2y^3}{4y^2} = -2, \end{cases}$$

которая не имеет решений.

Следовательно, решениями системы (41) будут

$$x = y = 1 \quad \text{и} \quad x = 4, y = 2.$$

Ответ: $\{(1, 1), (4, 2)\}$.

Задача 45. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y \sin x = \log_2 \left| \frac{y \sin x}{1 + 3y} \right|, \\ (6y^2 + 2y) \cdot \left(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} \right) = 25y^2 + 6y + 1, \end{cases} \quad (44)$$

удовлетворяющие условию $|y| \leq 1$.

Решение. Для краткости обозначим

$$4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = a.$$

Тогда второе уравнение системы (44) перепишем в виде

$$(25 - 6a)y^2 + (6 - 2a)y + 1 = 0. \quad (45)$$

Пусть $25 - 6a = 0$. Из уравнения (45) находим, что $y = \frac{3}{7}$.

На основании первого уравнения системы (44) устанавливаем, что

$$-\frac{3}{7} \leq y \sin x = \log_2 \left| \frac{y \sin x}{1 + 3y} \right| = \log_2 \frac{3|\sin x|}{16} \leq \log_2 \frac{3}{16} < -2.$$

Получили противоречие: $-\frac{3}{7} < -2$, которое означает, что для любого решения системы (44) равенство $25 - 6a = 0$ выполняться не может.

Корнями квадратного относительно y уравнения (45) являются

$$y_1 = -\frac{3 - a + \sqrt{a^2 - 16}}{25 - 6a}, \quad y_2 = -\frac{3 - a - \sqrt{a^2 - 16}}{25 - 6a}.$$

Поскольку

$$a^2 - 16 = \left(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} \right)^2 - 16 = \left(4^{\sin^2 x} - 4^{\cos^2 x} \right)^2,$$

то

$$y_1 = \frac{2 \cdot 4^{\sin^2 x} - 3}{25 - 6(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})}, \quad y_2 = \frac{2 \cdot 4^{\cos^2 x} - 3}{25 - 6(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})}.$$

Итак, система (44) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y \sin x = \log_2 \left| \frac{y \sin x}{1 + 3y} \right|, \\ y = \frac{2 \cdot 4^{\sin^2 x} - 3}{25 - 6(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})}; \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} y \sin x = \log_2 \left| \frac{y \sin x}{1 + 3y} \right|, \\ y = \frac{2 \cdot 4^{\cos^2 x} - 3}{25 - 6(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})}. \end{cases} \quad (47)$$

Решим систему (46). В силу второго уравнения системы (46)

$$\begin{aligned} \frac{1 + 3y}{y} &= 3 + \frac{1}{y} = 3 + \frac{25 - 6(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})}{2 \cdot 4^{\sin^2 x} - 3} = \\ &= \frac{16 - 6 \cdot 4^{\cos^2 x}}{2 \cdot 4^{\sin^2 x} - 3} = \frac{2 \cdot 4^{\cos^2 x} (2 \cdot 4^{\sin^2 x} - 3)}{2 \cdot 4^{\sin^2 x} - 3} = 2 \cdot 4^{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

При этом было использовано то, что для решений системы (46) выполняется условие $y \neq 0$, так как в противном случае в первом уравнении не будет иметь смысла выражение $\log_2 \left| \frac{y \sin x}{1 + 3y} \right|$.

Подставляя $2 \cdot 4^{\cos^2 x}$ вместо $\frac{1 + 3y}{y}$ в правую часть первого уравнения системы (46), находим:

$$\begin{aligned} \log_2 \left| \frac{y \sin x}{1 + 3y} \right| &= \log_2 |\sin x| - \log_2 \left| \frac{1 + 3y}{y} \right| = \\ &= \log_2 |\sin x| - \log_2 (2 \cdot 4^{\cos^2 x}) = \log_2 |\sin x| - 1 - 2 \cos^2 x. \end{aligned}$$

Используя условие $|y| \leq 1$, первое уравнение системы (46), а также очевидные неравенства $\log_2 |\sin x| \leq 0$ и $\cos^2 x \geq 0$, получаем, что

$$-1 \leq y \sin x = \log_2 |\sin x| - 1 - 2 \cos^2 x \leq -1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \begin{cases} y \sin x = -1, \\ \log_2 |\sin x| = 0, \\ \cos x = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y \sin x = -1, \\ |\sin x| = 1 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} \sin x = -1, \\ y = 1, \\ \sin x = 1, \\ y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ y = 1, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ y = -1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Подставляя $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, y = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ во второе уравнение системы (46), получаем неверное равенство $1 = -1$.

Подставляя $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, y = -1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ в оба уравнения системы (46), убеждаемся, что эти числа являются решениями.

Итак, множеством решений системы (46) является множество упорядоченных пар чисел $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, -1\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Решим систему (47). Используя второе уравнение этой системы подобно предыдущему, устанавливаем, что

$$\frac{1 + 3y}{y} = 2 \cdot 4^{\sin^2 x}.$$

Подставляя $2 \cdot 4^{\sin^2 x}$ вместо $\frac{1+3y}{y}$ в правую часть первого уравнения системы (47), так же, как и ранее, находим, что

$$y \sin x = \log_2 |\sin x| - 1 - 2 \sin^2 x.$$

Используя неравенства $\log_2 |\sin x| \leq 0$ и $\sin^2 x \geq 0$, а также условие $|y| \leq 1$, как и ранее, получаем, что

$$-1 \leq y \sin x = \log_2 |\sin x| - 1 - 2 \sin^2 x \leq -1.$$

Отсюда следует, что для решений системы (47) должны выполняться равенства

$$y \sin x = -1, \quad \log_2 |\sin x| = 0, \quad \sin x = 0,$$

что невозможно.

Значит, система (47) решений не имеет.

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, -1 \right) \right\} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Задача 46. При положительных a и b решите относительно x и y систему уравнений

$$\begin{cases} a^x \cdot b^y = m, \\ x + y = n. \end{cases} \quad (48)$$

Решение. Показательная функция

$$f(x) = c^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (c > 0, c \neq 1)$$

является положительной, а степень

$$1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Поэтому при любых положительных a и b произведение степеней

$$a^x \cdot b^y > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, при $m \leq 0$ равенство $a^x \cdot b^y = m$ не верно, а система (48) решений не имеет.

Пусть $m > 0$. Выделим два случая относительно положительного параметра a : $a = 1$ и $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

При $a = 1$ система (48) будет иметь вид

$$\begin{cases} b^y = m, \\ x + y = n \end{cases} \quad (m > 0, b > 0). \quad (49)$$

Если $b = 1$, то $b^y = 1^y = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Значит, при $b = 1, m \neq 1$ система (49) решений не имеет.

При $m = b = 1$ решением первого уравнения системы (49) будет любое действительное число y , а из второго уравнения системы (49) находим, что $y = n - x$ при любых действительных x и n .

Если $b > 0$ и $b \neq 1$, то система (49) равносильна системе (учитывается, что $m > 0$)

$$\begin{cases} y = \log_b m, \\ x + y = n \end{cases} \iff \begin{cases} x = n - \log_b m, \\ y = \log_b m. \end{cases}$$

Следовательно, при $a = b = 1, m > 0, m \neq 1$ и любом действительном n у системы (48) нет решений.

При $a = b = m = 1$ и любом действительном n решениями системы (48) будут $(x, n - x)$, где x — любое действительное число.

При $m > 0, a = 1, b > 0, b \neq 1$ и любом действительном n система (48) имеет одно решение $(n - \log_b m, \log_b m)$.

Пусть $a > 0, a \neq 1$, когда $m > 0$ и $b > 0$. Тогда почленным логарифмированием по основанию a первого уравнения системы (48) приводим эту систему к равносильной системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} \log_a(a^x \cdot b^y) = \log_a m, \\ x + y = n \end{cases} &\iff \begin{cases} x + (\log_a b)y = \log_a m, \\ x + y = n \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} x = n - y, \\ (1 - \log_a b)y = n - \log_a m. \end{cases} \end{aligned}$$

Решим уравнение

$$(1 - \log_a b)y = n - \log_a m \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, m > 0). \quad (50)$$

Если $\log_a b = 1$, т.е. $a = b > 0, a \neq 1$, то при $n \neq \log_a m$ у уравнения (50) нет решений, а при $n = \log_a m$ любое действительное число y является решением уравнения (50).

Если же $\log_a b \neq 1$, т. е. $b \neq a$, то решением уравнения (50) будет

$$y = \frac{n - \log_a m}{1 - \log_a b}$$

при $a > 0, a \neq 1, b > 0, m > 0$ и любом действительном n .

Если $b = a > 0, a \neq 1, m > 0, n \neq \log_a m$, то у системы (48) нет решений.

Если $b = a > 0, a \neq 1, m > 0, n = \log_a m$, то любая пара $(x, \log_a m - x)$ будет решением системы (48).

Если $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq a, m > 0$ и n — любое действительное число, то решением системы (48) будет

$$\left(\frac{\log_a m - n \log_a b}{1 - \log_a b}, \frac{n - \log_a m}{1 - \log_a b} \right).$$

Ответ: $\{(x, n - x)\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ при $m = a = b = 1$ и любом действительном n ; $\{(x, \log_a m - x)\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ при $m > 0, b = a > 0, a \neq 1, n = \log_a m$; $\{(n - \log_b m, \log_b m)\}$ при $m > 0, a = 1, b > 0, b \neq 1$ и любом действительном n ; $\left\{ \left(\frac{\log_a m - n \log_a b}{1 - \log_a b}, \frac{n - \log_a m}{1 - \log_a b} \right) \right\}$ при $m > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq a$ и любом действительном n ; $\emptyset$ при $m \leq 0, a > 0, b > 0$, любом действительном n и при $m > 0, m \neq 1, a = b = 1$, любом действительном n , а также при $m > 0, b = a > 0, a \neq 1, n \neq \log_a m$.

Задача 47. При положительных x, y, a и b решите относительно x и y систему уравнений

$$\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^a = y^b. \end{cases} \quad (51)$$

Решение. С учётом второго уравнения системы (51) первое её уравнение преобразуем следующим образом:

$$x^y = y^x \iff x^{y \cdot \frac{a}{y}} = y^{x \cdot \frac{a}{y}} \iff x^a = y^{\frac{ax}{y}} \iff$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y^b = y^{\frac{ax}{y}} &\Leftrightarrow b = \frac{ax}{y} \Leftrightarrow x = \frac{by}{a} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^a = \left(\frac{by}{a}\right)^a &\Leftrightarrow y^b = \left(\frac{by}{a}\right)^a \Leftrightarrow y^{b-a} = \left(\frac{b}{a}\right)^a. \end{aligned}$$

Тогда система (51) равносильна системе

$$\begin{cases} y^{b-a} = \left(\frac{b}{a}\right)^a, \\ x^a = y^b. \end{cases} \quad (52)$$

Дальнейшие рассуждения разделим на два случая, когда $a = b$ и когда $a \neq b$.

Если $a = b$, то первое уравнение системы (52) выполняется при любом положительном y . Второе уравнение этой системы равносильно уравнению $x = y$.

Следовательно, любая пара (x, x) положительных x является решением системы (51) при $a = b > 0$.

При $a \neq b$ из первого уравнения системы (52) находим

$$y = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{b-a}}.$$

При этом из второго уравнения системы (52) получаем, что

$$x = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{b-a}}.$$

Итак, при $a > 0$, $b > 0$ и $a \neq b$ система (51) имеет одно решение

$$\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{b-a}}, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{b-a}} \right).$$

Ответ: если $a=b>0$, то $\{(x, x)\} \quad \forall x \in (0; +\infty)$; если $a>0, b>0$,

$$a \neq b, \text{ то } \left\{ \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{b-a}}, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{b-a}} \right) \right\}.$$

Задача 48. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^y = y^x, \\ a^x = b^y \end{cases} \quad (53)$$

относительно x и y при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $b \neq a$.

Решение. Система имеет смысл при $x > 0$ и $y > 0$.

Поскольку $x > 0$, то существует такое число u , что $b^u = x$.

По аналогичной причине существует такое число v , что $a^v = y$.

При $x = b^u$, $y = a^v$ на основании первого уравнения системы (53) получаем равенство

$$b^{uy} = a^{vx}. \quad (54)$$

Учитывая второе уравнение системы (53), устанавливаем, что

$$b^{uy} = (b^y)^u = (a^x)^u = a^{ux}.$$

Тогда равенство (54) будет иметь вид

$$a^{ux} = a^{vx} \iff ux = vx \iff x(u - v) = 0.$$

Поскольку $x > 0$, то $u - v = 0$, т.е. $v = u$.

Следовательно, решением системы (53) будет

$$x = b^u, \quad y = a^u, \quad (55)$$

где u — некоторые действительные числа, причём первое уравнение системы (53) выполняется при всех тех u , при которых имеет место второе уравнение системы (53).

Логарифмируя по основанию c , где c — любое положительное число, не равное единице, второе уравнение системы (53), получаем, что

$$x \log_c a = y \log_c b.$$

Отсюда, с учётом (55), имеем:

$$b^u \log_c a = a^u \log_c b,$$

то есть,

$$\left(\frac{b}{a}\right)^u = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

С учётом того, что $b \neq a$, полученное равенство прологарифмируем по основанию $c > 0, c \neq 1$:

$$u \cdot \log_c \frac{b}{a} = \log_c \frac{\log_c b}{\log_c a} \iff u = \frac{\log_c \frac{\log_c b}{\log_c a}}{\log_c b - \log_c a}.$$

Тогда, используя формулы

$$\frac{\log_c A}{\log_c B} = \log_B A \quad \text{и} \quad c^{\log_c A} = A,$$

где $A > 0, B > 0, B \neq 1, c > 0, c \neq 1$, находим решение системы (53):

$$\begin{aligned} x = b^u &= b^{\frac{\log_c \frac{\log_c b}{\log_c a}}{\log_c b - \log_c a}} = b^{\frac{\log_c \frac{\log_c b}{\log_c a}}{\log_c b} \cdot \frac{\log_c b}{\log_c b - \log_c a}} = \\ &= \left(b^{\frac{\log_c \frac{\log_c b}{\log_c a}}{\log_c b}} \right)^{\frac{\log_c b}{\log_c b - \log_c a}} = \left(\frac{\log_c b}{\log_c a} \right)^{\frac{\log_c b}{\log_c b - \log_c a}}, \\ y = a^u &= a^{\frac{\log_c \frac{\log_c b}{\log_c a}}{\log_c b - \log_c a}} = a^{\frac{\log_c \frac{\log_c b}{\log_c a}}{\log_c a} \cdot \frac{\log_c a}{\log_c b - \log_c a}} = \\ &= \left(a^{\frac{\log_c \frac{\log_c b}{\log_c a}}{\log_c a}} \right)^{\frac{\log_c a}{\log_c b - \log_c a}} = \left(\frac{\log_c b}{\log_c a} \right)^{\frac{\log_c a}{\log_c b - \log_c a}}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\left(\frac{\log_c b}{\log_c a} \right)^{\frac{\log_c b}{\log_c b - \log_c a}}, \left(\frac{\log_c b}{\log_c a} \right)^{\frac{\log_c a}{\log_c b - \log_c a}} \right) \right\}, c > 0, c \neq 1.$$

Задача 49. Относительно x и y решите систему уравнений

$$\begin{cases} (ax)^{\log_c a} = (by)^{\log_c b}, \\ b^{\log_c x} = a^{\log_c y}. \end{cases} \quad (56)$$

Решение. Уравнения системы имеют смысл при

$$x > 0, y > 0, a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1.$$

Будем считать, что эти условия выполняются.

Логарифмируя по основанию c второе уравнение системы (56), получаем уравнение

$$\log_c a \cdot \log_c y = \log_c b \cdot \log_c x. \quad (57)$$

Если $a = 1, b \neq 1$, т.е. $\log_c a = 0, \log_c b \neq 0$, то уравнение (57) приводится к простейшему логарифмическому уравнению

$$\log_c x = 0,$$

а его решением будет $x = 1$ при любом $y > 0$.

При $a = 1, b \neq 1, x = 1$ первое уравнение системы (56) будет иметь вид

$$(by)^{\log_c b} = 1.$$

Показатель степени $\log_c b \neq 0$, так как $b \neq 1$. Поэтому $by = 1$, а значит, $y = \frac{1}{b}$.

Следовательно, при $a = 1, b \neq 1$ решением системы (56) будет упорядоченная пара $\left(1, \frac{1}{b}\right)$.

Если $b = 1, a \neq 1$, т.е. $\log_c b = 0, \log_c a \neq 0$, то уравнение (57) приводится к простейшему логарифмическому уравнению

$$\log_c y = 0,$$

а его решением будет $y = 1$ при любом $x > 0$.

При $b = 1, a \neq 1, y = 1$ первое уравнение системы (56) будет иметь вид

$$(ax)^{\log_c a} = 1.$$

Показатель степени $\log_c a \neq 0$, так как $a \neq 1$. Поэтому $ax = 1$, а значит, $x = \frac{1}{a}$.

Следовательно, при $b = 1$, $a \neq 1$ решением системы (56) будет упорядоченная пара $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$.

Если $a = b = 1$, то $\log_c a = \log_c b = 0$, и любая упорядоченная пара (x, y) положительных чисел x и y будет решением уравнения (57).

В этом случае первое уравнение системы (56) имеет вид $x^0 = y^0$, и его решением будет любая упорядоченная пара (x, y) положительных чисел x и y .

Значит, при $a = b = 1$ множеством решений системы (56) является множество упорядоченных пар $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

Пусть $a \neq 1$ и $b \neq 1$. Тогда из уравнения (57) получаем пропорцию

$$\frac{\log_c y}{\log_c b} = \frac{\log_c x}{\log_c a}. \quad (58)$$

Положим, что отношение равно z . Тогда

$$\frac{\log_c x}{\log_c a} = z \iff \log_a x = z \iff x = a^z$$

и

$$\frac{\log_c y}{\log_c b} = z \iff \log_b y = z \iff y = b^z.$$

При $x = a^z$, $y = b^z$ первое уравнение системы (56) примет вид

$$(a^{z+1})^{\log_c a} = (b^{z+1})^{\log_c b}.$$

Логарифмируя по основанию c , получаем, что

$$\log_c^2 a \cdot (z + 1) = \log_c^2 b \cdot (z + 1) \iff (\log_c^2 a - \log_c^2 b)(z + 1) = 0. \quad (59)$$

Поскольку $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то коэффициент

$$\log_c^2 a - \log_c^2 b = 0 \iff \begin{cases} \log_c a = \log_c b, \\ \log_c a = -\log_c b \end{cases} \iff \begin{cases} a = b, \\ a = \frac{1}{b}. \end{cases}$$

Если $b = a$ или $b = \frac{1}{a}$, то решением уравнения (59) будет любое z .

Если же $b \neq a^{\pm 1}$, то решением уравнения (59) будет $z = -1$.

Таким образом, при $0 < b = a \neq 1$ из уравнения (58) получаем, что

$$\log_c y = \log_c x,$$

а значит, $y = x$ при $x > 0$.

Следовательно, если $0 < b = a \neq 1$, то множеством решений системы (56) будет $\{(x, x): x > 0\}$.

При $0 < b = \frac{1}{a} \neq 1$ из уравнения (58) получаем, что

$$\log_c y = -\log_c x,$$

а значит, $y = \frac{1}{x}$ при $x > 0$.

Следовательно, если $0 < b = \frac{1}{a} \neq 1$, то множеством решений системы (56) будет $\left\{\left(x, \frac{1}{x}\right): x > 0\right\}$.

При $b \neq a^{\pm 1}$, учитывая, что $z = -1$, получаем решение системы (56) в виде упорядоченной пары $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$, где $a \neq 1, b \neq 1$.

Ответ: $\{(x, y): x > 0, y > 0\}$ при $a = b = 1, c > 0, c \neq 1$;

$\{(x, x): x > 0\}$ при $0 < b = a \neq 1, c > 0, c \neq 1$;

$\left\{\left(x, \frac{1}{x}\right): x > 0\right\}$ при $0 < b = \frac{1}{a} \neq 1, c > 0, c \neq 1$;

$\left\{\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)\right\}$ при $b \neq a^{\pm 1}, a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$;

$\emptyset$ при $c < 0$, при $c = 1$, при $a < 0$, при $b < 0$.

Задача 50. Найдите все значения a и b , при которых система

$$\begin{cases} \left| \frac{x^y - 1}{x^y + 1} \right| = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases} \quad (60)$$

имеет только одно решение (a, b, x и y — действительные числа, $x > 0$). Укажите это решение.

Решение. Если заменить y на $-y$, то при любом действительном y и любом действительном положительном x система (60) не изменится, так как

$$\left| \frac{x^{-y} - 1}{x^{-y} + 1} \right| = \left| \frac{1 - x^y}{1 + x^y} \right| = \left| \frac{x^y - 1}{x^y + 1} \right|$$

и

$$x^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2.$$

Поэтому, если (x_0, y_0) — решение системы (60), то и $(x_0, -y_0)$ будет решением системы (60).

Тогда система (60) имеет только одно решение в случае, когда

$$y_0 = -y_0 \iff y_0 = 0.$$

При $y = 0$ из первого уравнения системы (60) получаем, что параметр $a = 0$, а из второго — $b > 0$.

При $a = 0$ первое уравнение системы (60) будет иметь вид

$$\left| \frac{x^y - 1}{x^y + 1} \right| = 0 \iff x^y - 1 = 0 \iff x^y = 1.$$

Значит, надо найти те значения параметра b , которые больше нуля и при которых система

$$\begin{cases} x^y = 1, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases} \quad (61)$$

имеет только одно решение.

Первое уравнение системы (61) выполняется, когда $x = 1$, а y — любое действительное число, и когда $y = 0$, $x > 0$.

Следовательно, система (61) равносильна совокупности двух систем при $b > 0$:

$$\begin{cases} x = 1, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1, \\ y^2 = b - 1; \end{cases} \quad (62)$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ y = 0, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ y = 0, \\ x^2 = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{b}, \\ y = 0. \end{cases}$$

Таким образом, система (61) имеет решение $(\sqrt{b}, 0)$. И у системы (61) будет только одно решение, когда система (62) не имеет решений или когда система (62) имеет одно решение, которое совпадает с $(\sqrt{b}, 0)$.

Если $b - 1 < 0$, т.е. $0 < b < 1$, то у системы (62) нет решений.

Если $b = 1$, то система (62) имеет одно решение $(1, 0)$, которое получаем из решения $(\sqrt{b}, 0)$ системы (61) при $b = 1$.

Если $b > 1$, то система (62) имеет два решения: $(1, -\sqrt{b-1})$ и $(1, \sqrt{b-1})$.

Стало быть, система (61) имеет только одно решение при $0 < b \leq 1$. А система (60) имеет только одно решение при $a = 0$, $0 < b \leq 1$.

Этим решением будет $(\sqrt{b}, 0)$.

Ответ: при $a = 0$, $0 < b \leq 1$; решение — $(\sqrt{b}, 0)$.

Задача 51. Найдите множество целых значений x , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{x+8}{x+2} > 2, \\ \lg(x-1) < 1. \end{cases} \quad (63)$$

Решение. Первое неравенство системы (63) равносильно неравенству

$$\frac{x+8}{x+2} - 2 > 0 \iff \frac{-x+4}{x+2} > 0 \iff \frac{x-4}{x+2} < 0 \iff$$

$$\iff (x+2)(x-4) < 0 \iff -2 < x < 4.$$

Второе неравенство системы (63) равносильно неравенству

$$0 < x-1 < 10 \iff 1 < x < 11.$$

Целыми числами, которые принадлежат одновременно интервалам $(-2; 4)$ и $(1; 11)$, являются 2 и 3.

Ответ: $\{2, 3\}$.

Задача 52. Решите систему

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 8\sqrt{2}. \end{cases} \quad (64)$$

Решение. Первое неравенство системы (64) равносильно неравенству

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{8}\right)^x &> \left(\frac{3}{4}\right)^3 \iff \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)^x > \left(\frac{3}{4}\right)^3 \iff \\ &\iff \left(\frac{3}{4}\right)^x > \left(\frac{3}{4}\right)^3 \iff x < 3. \end{aligned}$$

Второе неравенство системы (64) равносильно неравенству

$$\begin{aligned} 2^{x^2-6x-3,5} < 2^{3,5} &\iff x^2 - 6x - 3,5 < 3,5 \iff x^2 - 6x - 7 < 0 \iff \\ &\iff (x+1)(x-7) < 0 \iff -1 < x < 7. \end{aligned}$$

Следовательно, множеством решений системы (64) будет $(-1; 3)$.

Ответ: $(-1; 3)$.

Задача 53. Решите систему

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 16x + 64} > 0, \\ \lg \sqrt{x+7} > \lg(x-5) - 2 \lg 2. \end{cases} \quad (65)$$

Решение. Так как $x^2 + 4 > 0$ при любом x , то первое неравенство системы (65) равносильно неравенству

$$x^2 - 16x + 64 > 0 \iff (x-8)^2 > 0 \iff x-8 \neq 0 \iff x \neq 8.$$

Второе неравенство системы (65) равносильно неравенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lg(x+7) > \lg(x-5) - 2 \lg 2 &\iff \lg(x+7) + 4 \lg 2 > 2 \lg(x-5) \iff \\ &\iff \begin{cases} x-5 > 0, \\ \lg(16(x+7)) > \lg(x-5)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 5, \\ 16(x+7) > (x-5)^2 \end{cases} \iff \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x^2 - 26x - 87 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ (x+3)(x-29) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < x < 29.$$

Тогда множеством решений системы (65) будет $(5; 8) \cup (8; 29)$.

Ответ: $(5; 8) \cup (8; 29)$.

Задача 54. Решите систему

$$\begin{cases} 0, 2^{\cos x} \leq 1, \\ \frac{x-1}{2-x} + \frac{1}{2} > 0. \end{cases} \quad (66)$$

Решение. Первое неравенство системы (66) равносильно тригонометрическому неравенству

$$\cos x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Второе неравенство системы (66) равносильно неравенству

$$\frac{x}{2(2-x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} < 0 \Leftrightarrow x(x-2) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

Следовательно, множеством решений системы (66) является полуинтервал $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Задача 55. Найдите натуральные значения x , удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x-1) < 4, \\ \frac{x}{x-3} + \frac{x-5}{x} < \frac{2x}{3-x}. \end{cases} \quad (67)$$

Решение. Система (67) равносильна системе

$$\begin{cases} 0 < x-1 < \sqrt{2}^4, \\ \frac{3x}{x-3} + \frac{x-5}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x-1 < 4, \\ \frac{3x^2 + (x-3)(x-5)}{x(x-3)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\iff \begin{cases} 1 < x < 5, \\ \frac{4x^2 - 8x + 15}{x(x-3)} < 0. \end{cases}$$

Квадратный трёхчлен

$$4x^2 - 8x + 15 = 4(x-1)^2 + 11 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, система (67) равносильна системе

$$\begin{cases} 1 < x < 5, \\ x(x-3) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 < x < 5, \\ 0 < x < 3 \end{cases} \iff 1 < x < 3.$$

Интервалу $(1; 3)$ принадлежит одно натуральное число — 2.

Ответ: 2.

Задача 56. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x-1) \lg 2 + \lg(2^{x+1} + 1) < \lg(7 \cdot 2^x + 12), \\ \log_x(x+2) > 2. \end{cases} \quad (68)$$

Решение. Первое неравенство системы (68) равносильно неравенству

$$\begin{aligned} & \lg 2^{x-1} + \lg(2^{x+1} + 1) < \lg(7 \cdot 2^x + 12) \iff \\ \iff & \lg(2^{2x} + 2^{x-1}) < \lg(7 \cdot 2^x + 12) \iff 2^{2x} + 2^{x-1} < 7 \cdot 2^x + 12 \iff \\ \iff & 2 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 2^x - 24 < 0 \iff (2 \cdot 2^x + 3)(2^x - 8) < 0 \iff \\ \iff & 2^x - 8 < 0 \iff 2^x < 2^3 \iff x < 3. \end{aligned}$$

Второе неравенство системы (68) равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \log_x(x+2) > 2, \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < x+2 < x^2, \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1, \\ x+2 > x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x + 2 < x^2, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 - x - 2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \right. \\
 &\quad \left. \left[\begin{cases} x > 1, \\ x + 2 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases} \right. \right. \\
 &\Leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 < x < 1, \\ (x + 1)(x - 2) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x - 2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2. \right. \\
 &\quad \left. \left[\begin{cases} x > 1, \\ (x + 1)(x - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x > 1, \\ x - 2 < 0 \end{cases} \right. \right.
 \end{aligned}$$

Следовательно, система (68) равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} x < 3, \\ 1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Ответ: $(1; 2)$.

Задача 57. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x - 1)^{2-y} > 1, \\ (4 - y)^{3-x} \leq 1. \end{cases} \quad (69)$$

Решение. В зависимости от оснований степеней рассмотрим следующие логически возможные случаи, в которых система (69) имеет смысл:

- 1) $0 < x - 1 < 1$, $0 < 4 - y < 1$; 2) $0 < x - 1 < 1$, $4 - y = 1$;
- 3) $0 < x - 1 < 1$, $4 - y > 1$; 4) $x - 1 > 1$, $0 < 4 - y < 1$;
- 5) $x - 1 > 1$, $4 - y = 1$; 6) $x - 1 > 1$, $4 - y > 1$.

В первом случае система (69) равносильна системе

$$\begin{cases} 0 < x - 1 < 1, \\ (x - 1)^{2-y} > 1, \\ 0 < 4 - y < 1, \\ (4 - y)^{3-x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x - 1 < 1, \\ 2 - y < 0, \\ 0 < 4 - y < 1, \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ x \leq 3, \\ y > 2, \\ 3 < y < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ 3 < y < 4. \end{cases}$$

Во втором случае система (69) равносильна системе

$$\begin{cases} 0 < x - 1 < 1, \\ (x - 1)^{2-y} > 1, \\ 4 - y = 1, \\ (4 - y)^{3-x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x - 1 < 1, \\ 2 - y < 0, \\ 4 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ y > 2, \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

В третьем случае система (69) равносильна системе

$$\begin{cases} 0 < x - 1 < 1, \\ (x - 1)^{2-y} > 1, \\ 4 - y > 1, \\ (4 - y)^{3-x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x - 1 < 1, \\ 2 - y < 0, \\ 4 - y > 1, \\ 3 - x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ x \geq 3, \\ y > 2, \\ y < 3, \end{cases}$$

и не имеет решений, так как не существует такого x , при котором одновременно выполняются неравенства $1 < x < 2$ и $x \geq 3$.

В четвёртом случае система (69) равносильна системе

$$\begin{cases} x - 1 > 1, \\ (x - 1)^{2-y} > 1, \\ 0 < 4 - y < 1, \\ (4 - y)^{3-x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 1, \\ 2 - y > 0, \\ 0 < 4 - y < 1, \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x \leq 3, \\ y < 2, \\ 3 < y < 4, \end{cases}$$

и не имеет решений, так как не существует такого y , при котором одновременно выполняются неравенства $y < 2$ и $3 < y < 4$.

В пятом случае система (69) равносильна системе

$$\begin{cases} x - 1 > 1, \\ (x - 1)^{2-y} > 1, \\ 4 - y = 1, \\ (4 - y)^{3-x} \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 1 > 1, \\ 2 - y > 0, \\ 4 - y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2, \\ y < 2, \\ y = 3, \end{cases}$$

и не имеет решений, так как не существует такого y , которое меньше 2 и в то же время равно 3.

В шестом случае система (69) равносильна системе

$$\begin{cases} x - 1 > 1, \\ (x - 1)^{2-y} > 1, \\ 4 - y > 1, \\ (4 - y)^{3-x} \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 1 > 1, \\ 2 - y > 0, \\ 4 - y > 1, \\ 3 - x \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2, \\ x \geq 3, \\ y < 2, \\ y < 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 3, \\ y < 2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\{(x, y): 1 < x < 2, 3 \leq y < 4\} \cup \{(x, y): x \geq 3, y < 2\}$$

есть множество решений системы (69).

Ответ: $\{(x, y): 1 < x < 2, 3 \leq y < 4\} \cup \{(x, y): x \geq 3, y < 2\}$.

Задача 58. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x - 1)^{3-y} < 1, \\ (4 - y)^{x-2} \geq 1. \end{cases}$$

Ответ: $\emptyset$.

Задача 59. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x-2}(6 - y) < 0, \\ \log_{3-y}(4 - x) > 0. \end{cases} \quad (70)$$

Решение. В зависимости от оснований логарифмов рассмотрим следующие логически возможные случаи, в которых система (70) имеет

смысл: 1) $0 < x - 2 < 1$, $0 < 3 - y < 1$; 2) $0 < x - 2 < 1$, $3 - y > 1$;
3) $x - 2 > 1$, $0 < 3 - y < 1$; 4) $x - 2 > 1$, $3 - y > 1$.

В первом случае система (70) равносильна системе

$$\begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ \log_{x-2}(6 - y) < 0, \\ 0 < 3 - y < 1, \\ \log_{3-y}(4 - x) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ 6 - y > 1, \\ 0 < 3 - y < 1, \\ 0 < 4 - x < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 < x < 3, \\ 3 < x < 4, \\ y < 5, \\ 2 < y < 3, \end{cases}$$

и не имеет решений, так как не существует такого x , при котором одновременно выполняются неравенства $2 < x < 3$ и $3 < x < 4$.

Во втором случае система (70) равносильна системе

$$\begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ \log_{x-2}(6 - y) < 0, \\ 3 - y > 1, \\ \log_{3-y}(4 - x) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ 6 - y > 1, \\ 3 - y > 1, \\ 4 - x > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 < x < 3, \\ x < 3, \\ y < 5, \\ y < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 < x < 3, \\ y < 2. \end{cases}$$

В третьем случае система (70) равносильна системе

$$\begin{cases} x - 2 > 1, \\ \log_{x-2}(6 - y) < 0, \\ 0 < 3 - y < 1, \\ \log_{3-y}(4 - x) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2 > 1, \\ 0 < 6 - y < 1, \\ 0 < 3 - y < 1, \\ 0 < 4 - x < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 3, \\ 3 < x < 4, \\ 5 < y < 6, \\ 2 < y < 3, \end{cases}$$

и не имеет решений, так как не существует такого y , при котором одновременно выполняются неравенства $2 < y < 3$ и $5 < y < 6$.

В четвёртом случае система (70) равносильна системе

$$\begin{cases} x - 2 > 1, \\ \log_{x-2}(6 - y) < 0, \\ 3 - y > 1, \\ \log_{3-y}(4 - x) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2 > 1, \\ 0 < 6 - y < 1, \\ 3 - y > 1, \\ 4 - x > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 3, \\ x < 3, \\ 5 < y < 6, \\ y < 2, \end{cases}$$

и не имеет решений, так как, например, не существует такого x , которое одновременно больше и меньше 3.

Ответ: $\{(x, y): 2 < x < 3, y < 2\}$.

Задача 60. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x-1}(5 - y) < 0, \\ \log_{2-y}(4 - x) < 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{(x, y): 1 < x < 2, 1 < y < 2\}$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ананченко, К.О. Алгебра и начала анализа: учеб. пособие для 11-го кл. общеобразоват. шк. с углубл. изучением математики / К.О. Ананченко, Г.Н. Петровский. — Минск: Народная асвета, 1997. — 375 с.

2. Богатырёв, Г.И. Математика для подготовительных курсов техникумов / Г.И. Богатырёв, О.А. Боковнев. — М.: Наука, 1988. — 408 с.

3. Бородуля, И.Т. Показательная и логарифмическая функции: задачи и упражнения / И.Т. Бородуля. — М.: Просвещение, 1984. — 112 с.

4. Галицкий, М.Л. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа / М.Л. Галицкий, М.М. Мошкович, С.И. Шварцбуд. — М.: Просвещение, 1986. — 352 с.

5. Гнездовский, Ю.Ю. Решение тестовых заданий по математике: для подготовки к централизованному тестированию / Ю.Ю. Гнездовский, В.Н. Горбузов, С.Н. Даранчук. — Минск: Экоперспектива, 2006. — 200 с.

6. Задачи вступительных экзаменов по математике / В.В. Амелькин [и др.]. — Минск: ТетраСистемс, 2002. — 160 с.

7. Зеленский, А.С. Сборник конкурсных задач по математике / А.С. Зеленский. — М.: Научно-технический центр «Университетский», 1996. — 336 с.

8. Кречмар, В.А. Задачник по алгебре / В.А. Кречмар. — М.: Наука, 1972. — 416 с.

9. Кушнир, И.А. Неравенства. Задачи и решения / И.А. Кушнир. — Киев: Астарты, 1996. — 544 с.

10. Математика: экзаменационные задания на вступительных экзаменах в Гродненский государственный университет и их решения / Н.С. Берёзкина [и др.]. — Гродно: ГрГУ, 2001. — 160 с.

11. Моденов, П.С. Экзаменационные задачи по математике с анализом их решения / П.С. Моденов. — М.: Просвещение, 1969. — 351 с.

12. Назаретов, А.П. Математика / А.П. Назаретов, Б.П. Пигарев. — М.: РИПОЛ КЛАССИК, 1999. — 736 с.

13. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / под ред. М.И. Сканави. — М.: Высшая школа, 1988. — 431 с.

14. Сборник конкурсных задач по математике с методическими указаниями и решениями / В.М. Говоров [и др.]; под ред. А.И. Прилепко. — М.: Наука, 1986. — 384 с.

15. Черкасов, О.Ю. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену / О.Ю. Черкасов, А.И. Якушев. — 6-е изд., испр. и доп. — М.: Рольф, 2002. — 432 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Показательные и логарифмические уравнения	7
§1. Показательные уравнения	7
1. Простейшее показательное уравнение	7
2. Специальные виды показательных уравнений	12
2.1. Уравнение $a^{f(x)} = b^{g(x)}$	12
2.2. Уравнение $A_1 a^{f(x)+\beta_1} + \dots + A_n a^{f(x)+\beta_n} = B$...	14
2.3. Уравнение $A_1 a^{f(x)+\beta_1} + \dots + A_n a^{nf(x)+\beta_n} = B$..	15
2.4. Уравнение $Aa^{f(x)} + Ba^{\frac{f(x)}{2}} \cdot b^{\frac{f(x)}{2}} + Cb^{f(x)} = 0$.	18
3. Задачи	20
§2. Логарифмические уравнения	35
1. Простейшее логарифмическое уравнение	35
2. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$	38
3. Уравнение $\log_a f(x) = \log_b g(x)$	40
4. Логарифмические уравнения с неизвестной в основании логарифма	42
5. Показательно-степенные уравнения	48
6. Задачи	52
Глава 2. Показательные и логарифмические неравенства	73
§1. Показательные неравенства	73
1. Неравенство $a^{f(x)} > b$	73
2. Неравенство $a^{f(x)} < b$	77
3. Неравенства $a^{f(x)} \geq b$ и $a^{f(x)} \leq b$	78
4. Неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$	81
5. Показательно-степенные неравенства	84
6. Задачи	87

§2. Логарифмические неравенства	96
1. Простейшие логарифмические неравенства	96
2. Неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ и $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$	102
3. Логарифмические неравенства с неизвестной в основании логарифма	104
4. Задачи	113
Глава 3. Показательные и логарифмические системы	147
Рекомендуемая литература	203

Учебное издание

Гнездовский Юрий Юрьевич
Горбузов Виктор Николаевич
Проневич Павел Францевич

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Пособие

Редактор

Компьютерная верстка: П.Б. Павлючик

Сдано в набор **.**.2007. Подписано в печать **.**.2007.

Формат 60х84/16. Бумага офсетная.

Печать RISO. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. Уч.-изд. л. Тираж экз. Заказ

Учреждение образования «Гродненский государственный
университет имени Янки Купалы».

ЛИ № 02330/0133257 от 30.04.2004. Ул. Пушкина, 39, 230012, Гродно.

Отпечатано на технике Учреждения образования

«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».

ЛП № 02330/0056882 от 30.04.2004. Ул. Пушкина, 39, 230012, Гродно.